1 קיום בסיס אורתונורמלי - תהליך גראם-שמידט

משפט 1. *לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתונורמלי.*

הוכחה. יהי $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V. נקבל מבסיס זה בסיס אורתוגונלי $\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_n\right\}$.
נציג את **תהליך גראם-שמידט**, שבסופו יתקבל הבסיס הרצוי:

1. נגדיר $\mathring{v}_1 = v_1$.
2. לכל $k>1$, נגדיר $\mathring{v}_k = v_k - \pi_{\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k)$ (**נוסחת גראם-שמידט**).
3. כשנקבל בסיס אורתוגונלי $\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_n\right\}$, נשתמש בנרמול, ונקבל בסיס אורתונורמלי.

□

הערה 1.
1. בכל שלב אנו מקבלים וקטור $\mathring{v}_k$, שהוא ניצב למרחב $\text{Span}\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$:
$v_k = \mathring{v}_k + \pi_{\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k) \in \text{Span}\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$,
לכן $\text{Span}\{v_1,\ldots,v_k\} \subseteq \text{Span}\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$,
ומכאן $\text{Span}\{v_1,\ldots,v_k\} = \text{Span}\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k\right\}$.
2. יש גרסה של תהליך גראם-שמידט עם נרמול בכל צעד. זה לא ישנה את האלגוריתם, כי הנוסחה להיטל אינה תלויה בכפל של וקטור בסיס בסקלר.

כל קבוצה אורתונורמלית ניתנת להשלמה עד בסיס אורתונורמלי.

הוכחה. תהי $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית. היא בת"ל, ולכן $k\le n$.
אם $k=n$, אזי S היא בסיס אורתונורמלי, ואין מה להוכיח.
אם $k<n$, נשלים את S עד לבסיס B של V, ונשתמש בתהליך גראם-שמידט.

□

הערה 2. בהוכחה הקודמת, תהליך גראם-שמידט איננו משפיע על k הווקטורים הראשונים (כלומר, על הווקטורים של S).

2 אי-שוויון בסל

משפט 2. *אי-שוויון בסל Bessel*
תהי $\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית, ויהי $v\in V$. אזי

$$\|v\|^2 \ge |\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2$$

הוכחה. נשלים את הקבוצה $\{v_1,\ldots,v_k\}$ עד לבסיס אורתונורמלי $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$.
נשתמש במשפט פיתגורס:

$$\|v\|^2 = |\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2+|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_n\rangle|^2 \ge |\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2$$

□

לאחר שהוכחנו את אי-השוויון, נשאלת השאלה האם יכול להיות בו שוויון, ואם כן - מתי. אנו יודעים שיהיה שוויון אם הקבוצה תהיה בסיס אורתונורמלי, אבל נוכיח טענה חזקה יותר:

הערה 3. באי-שוויון בסל יש שוויון אם ורק אם $v \in \mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

הוכחה. $\boxed{\Rightarrow}$ אם $v \in \mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, נשתמש בעובדה שלכל $i > k$, מתקיים $v_i \perp \mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, ולכן $v_i \perp v$, זאת אומרת $\langle v, v_i \rangle = 0$, ולכן יש שוויון.

$\boxed{\Leftarrow}$ אם יש שוויון, אזי $\langle v, v_i \rangle = 0$ לכל $i > k$, כלומר $v \perp v_i$, ולכן $v \perp \mathsf{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. אבל $\mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathsf{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}^{\perp}$, ולכן $v \in \mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.
□

3 אי-שוויון קושי-שוורץ

נוכיח בעת אי-שוויון נוסף, שיעזור לנו לקבל משמעות גיאומטרית למכפלה הפנימית ולהגדיר גם זווית בין וקטורים. חשוב לציין - בכל משפט שבו משתמשים בנורמה ובמכפלה פנימית, הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית.

משפט 3. *אי-שוויון קושי-שוורץ*

1. *לכל $u, v \in V$ מתקיים אי-השוויון* $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
2. *שוויון מתקיים אם ורק אם u, v תלויים לינארית.*

הוכחה. 1. נניח $u \neq 0$, ונתבונן בווקטור $w = \frac{1}{\|u\|}u$. הוא נורמלי, כלומר $\|w\| = 1$.

נתבונן ב-$W = \mathsf{Span}\{w\}$. $\{w\}$ בסיס אורתונורמלי של W, כלומר גם $\{w\}$ קבוצה אורתונורמלית ב-V. נשתמש באי-שוויון בסל; נקבל שלכל $v \in V$ מתקיים

$$\|v\|^2 \geq |\langle v, w \rangle|^2 = \left|\left\langle v, \frac{1}{\|u\|}u \right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\|u\|}\langle v, u \rangle\right|^2 = \frac{1}{\|u\|}^2 |\langle u, v \rangle|^2$$

לכן $\|v\|^2 \|u\|^2 \geq |\langle u, v \rangle|^2$, ומקבלים את הדרוש.

אם $u = 0$, אזי לכל v מתקיים $\langle u, v \rangle = 0$, וכן $\|u\| = 0$, כלומר מתקיים שוויון.

2. אפשר להניח $u \neq 0$. אזי לפי ההערה לאי-שוויון בסל, שוויון מתקיים אם ורק אם $v \in \mathsf{Span}\{w\}$ אם ורק אם $v \in \mathsf{Span}\{u\}$ אם ורק אם u, v תלויים לינארית.
□

הערה 4. אם $V = \mathbb{F}^n$, ואם $\langle \ , \ \rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית, אזי אי-שוויון קושי-שוורץ אומר שמתקיים

$$\left|\alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}\right| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2} \cdot \sqrt{|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2}$$

במקרה הממשי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$|\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2} \cdot \sqrt{|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2}$$

הערה 5. אי־שוויון קושי־שוורץ מאפשר להגדיר (במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) זווית בין שני וקטורים שונים מאפס.

נתבונן ביחס $t=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$, $t\in\mathbb{R}$. לפי אי־שוויון קושי־שוורץ, $|t|=\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|}\leq 1$, ולכן $-1\leq t\leq 1$.

אזי נגדיר את **הזווית בין** u **ל־**v על ידי $\varphi:=\arccos\left(t\right)$.

מסמנים לעיתים $\varphi=\angle\left(u,v\right)$.

בעת אנו מוכנים למלא חור ישן: כאשר הגדרנו את הנורמה המושרית ממכפלה פנימית, נותר שם • – חור; לא הוכחנו את אי־שוויון המשולש. כעת, יש בידינו את הכלים להוכיח אותו.

משפט 4. *אי-שוויון המשולש לנורמה המושרית על ידי מכפלה פנימית*

$$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$$

הוכחה. ראשית, אם $z=x+iy\in\mathbb{C}$,

$$z+\overline{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\,\mathsf{Re}\left(z\right)\leq 2\left|z\right|$$

כעת, נוכיח כי $\|u+v\|^2\leq\left(\|u\|+\|v\|\right)^2$:

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$=\|u\|^2+\|v\|^2+\overline{\langle u,v\rangle}+\langle u,v\rangle=\|u\|^2+\|v\|^2+2\,\mathsf{Re}\left(\langle u,v\rangle\right)\leq$$

$$\leq\|u\|^2+\|v\|^2+2\left|\langle u,v\rangle\right|\leq\|u\|^2+\|v\|^2+2\left\|u\right\|\left\|v\right\|=\left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

□