1 מטריצות אוניטריות – המשך

הגיע הזמן לקשר בין מטריצות אוניטריות לבין המושגים של נורמליות, אורתוגונליות ואורתונורמליות. שני המשפטים הבאים יראו את הקשר (החזק) ביניהם:

משפט 1. *A אוניטרית אם ורק אם השורות של A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ יחסית למכפלה הסטנדרטית אם ורק אם העמודות של A גם מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ יחסית למכפלה הפנימית הסטנדרטית.*

הוכחה. $A^* = \overline{A}^t$, ולכן השורה ה-i של A^* שווה לעמודה ה-i של A צמודה. כלומר, אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ השורות של A, אם $\beta_1, \dots, \beta_n$ העמודות של A, אם $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ השורות של A, וכן אם $\beta_1^*, \dots, \beta_n^*$ העמודות של A^*, אזי $\alpha_i^* = \overline{\beta_i}$, וכן $\beta_i^* = \overline{\alpha_i}$ לכל $i = 1, \dots, n$.

בעת, A אוניטרית $\Leftrightarrow AA^* = I \Leftrightarrow$

$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\overline{\alpha}_{jk} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj}^* = I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (זו המכפלה הפנימית הסטנדרטית)

$\Leftrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ יחסית למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

הוכחנו עבור השורות. בעת, A אוניטרית $\Leftrightarrow$ A^t אוניטרית $\Leftrightarrow$ אותם השוויונים ל-A^t במקום ל-A $\Leftrightarrow$ $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ יחסית למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

□

נציג עוד קשר בין מטריצות אוניטריות לבין בסיסים אורתונורמליים.

משפט 2. *מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי אחר היא מטריצה אוניטרית.*

הוכחה. בזכור, אם B, B' שני בסיסים, אם G, G' מטריצות הגראם של המכפלה הפנימית יחסית ל-B, B' בהתאמה, ואם C היא מטריצת המעבר מ-B ל-B', אזי $G' = C^t G \overline{C}$.

נניח ש-B, B' בסיסים אורתונורמלים, אזי $G = G' = I$. לכן מתקיים $I = C^t I \overline{C} \Leftarrow$ $C^t \overline{C} = I \Leftarrow \overline{C}^t C = I \Leftarrow C^* C = I \Leftarrow C$ אוניטרית.

□

הגדרה 1. אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי למטריצות אוניטריות קוראים מטריצות אורתוגונליות.

הערה 1. A אורתוגונלית $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$.

2 המרחב הניצב

הגדרה 2. יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\emptyset \neq S \subseteq V$ קבוצה כלשהי. נגדיר $S^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in S : \langle v, u \rangle = 0\}$. $S^\perp$ נקרא **המרחב הניצב ל-S**.

זוהי בעצם קבוצת כל הווקטורים המאונכים לכל S.

הערה 2. $S^\perp$ תת-מרחב של V.

הוכחה. אם $v_1, v_2 \in S^\perp$ ואם $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, ואם $u \in S$, אזי:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u \rangle = \alpha_1 \langle v_1, u \rangle + \alpha_2 \langle v_2, u \rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

□

הערה 3. $S^{\perp}=(\mathsf{Span}\,(S))^{\perp}$.

הוכחה. אם $v\in(\mathsf{Span}\,(S))^{\perp}$, אזי $\langle v,u\rangle=0$ לכל $u\in\mathsf{Span}\,(S)$, כוללל $u\in S$, ולכן $v\in S^{\perp}$. אם $v\in S^{\perp}$, אזי $\langle v,u\rangle=0$ לכל $u\in S$. יהי $u\in\mathsf{Span}\,(S)$, ז"א שמתקיים $u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m$, כאשר $u_i\in S$. לכן,

$$\langle v,u\rangle=\langle v,\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m\rangle=\overline{\alpha}_1\langle v,u_1\rangle+\cdots+\overline{\alpha}_m\langle v,u_m\rangle=\overline{\alpha}_1\cdot0+\cdots+\overline{\alpha}_m\cdot0=0$$

□

3 הטלה של וקטור על תת-מרחב

בעת נרצה לקחת וקטור, ולהטיל אותו על תת-מרחב מסוים. אנחנו נתחיל עם הגדרה (שאולי תיראה מעט מסובבת), ואז נצדיק אותה.

הגדרה 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $W\subseteq V$ תת-מרחב. יהי $v\in V$. נניח ש-$B=\{w_1,\ldots,w_k\}$ בסיס אורתוגונלי של W, ונגדיר את **ההיטל של** v **על** W:

$$\pi_B(v)=\frac{\langle v,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1+\cdots+\frac{\langle v,w_k\rangle}{\|w_k\|^2}w_k$$

הצדקת ההגדרה. הרעיון בהיטל הוא "לפרק" את הווקטור v לשני חלקים: האחד במרחב W, שהוא ההיטל, והשני ב-$W^{\perp}$. הבחירה בבסיס אורתוגונלי איננה מקרית; זה כמו "פירוק לצירים", כי כל וקטור בבסיס מסמן כיוון ב-W, כמו הצירים ב-$\mathbb{R}^n$.

נסמן את הפירוק הזה $v=w+w'$, כאשר $w\in W$ ו-$w'\in W^{\perp}$. יש לנו בסיס של W, ולכן נוכל לכתוב $w=\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_kw_k$. בסך הכל,

$$v=w+w'=\underbrace{\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_kw_k}_{\pi_B(v)}+w'$$

לאחר שהגדרנו בסיס אורתונורמלי, הצגנו דרך למצוא את המקדמים בצירוף הלינארי. נפעל באופן דומה כאן: נכפול (במובן מכפלה פנימית, כמובן) את v ב-w_i, כשניעזר בעובדה ש-B בסיס אורתוגונלי וש-$w'\in W^{\perp}$. אם כן, נקבל:

$$\langle v,w_i\rangle=\langle\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_kw_k+w',v_i\rangle=\alpha_1\underbrace{\langle w_1,w_i\rangle}_{=0}+\cdots+\alpha_i\underbrace{\langle w_i,w_i\rangle}_{=\|w_i\|^2}+$$

$$+\cdots+\alpha_k\underbrace{\langle w_k,w_i\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle w',w_i\rangle}_{=0}=\alpha_i\|w_i\|^2$$

אנחנו יודעים ש-$w_i\neq0$ לכל $i=1,\ldots,n$ (כי B בסיס), לכן $\|w_i\|\neq0$, ולכן נוכל לחלק ולקבל את המקדם בצירוף הלינארי: $\alpha_i=\frac{\langle v,w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$.

בסך הכל, ביוון שאמרנו ש-w הוא $\pi_B(v)$, נקבל את ההגדרה הנ"ל.

□

הערה 4. $\pi_B(v)\in W$

הגדרנו הטלה, ובעת נוכיח שאם כופלים את האיברים בבסיס בסקלרים (שונים מאפס), ההטלה על תת-המרחב איננה משתנה. בעתיד, נוכיח שגם אם נשנה את הבסיס לגמרי, ההטלה לא תושפע.

הערה 5. אם נחליף כל וקטור w_i בבסיס על ידי וקטור פרופורציונאלי $\alpha_i w_i$ (כאשר $\alpha_i \neq 0$, כדי שיישאר בסיס), אזי $\pi_B(v)$ לא ישתנה.

הוכחה. נתבונן במחובר ה-i-י, ונראה שהוא איננו משתנה:

$$\frac{\langle v, \alpha_i w_i\rangle}{\|\alpha_i w_i\|^2}\alpha_i w_i = \frac{\overline{\alpha_i}\langle v, w_i\rangle}{|\alpha_i|^2\|w_i\|^2}\alpha_i w_i = \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}w_i$$

□

הערה 6. אם $\{w_1, \ldots, w_n\}$ בסיס אורתונורמלי של W, אזי

$$\pi_B(v) = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_k\rangle w_k$$

הערה 7. $\pi_B(v) = v$ אם ורק אם $v \in W$.

הוכחה. אם $v \in W$, אזי נציג את v כצירוף לינארי של איברי B: $v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$. מתקיים

$$\langle v, w_i\rangle = \alpha_i\langle w_i, w_i\rangle = \alpha_i\|w_i\|^2$$

ולכן

$$\pi_B(v) = \tfrac{\alpha_1\|w_1\|^2}{\|w_1\|^2}w_1 + \cdots + \tfrac{\alpha_1\|w_k\|^2}{\|w_k\|^2}w_k = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = v$$

בכיוון ההפוך, אם $\pi_B(v) = v$, אזי $v \in W$, כי ההיטל ב-W.

□

בתחילת הנושא של ההיטל, כאשר הצדקנו את ההגדרה, אמרנו שהרעיון הוא לפרק את v לשני וקטורים: $v = \pi_B(v) + w'$, כאשר $w' \in W^{\perp}$. הגענו להגדרה של היטל, ובעת – הגיע הזמן לבדוק את ההנחה הזו, כלומר האם ההגדרה באמת מקיימת את מה שרצינו.

הערה 8. $v - \pi_B(v) \in W^{\perp}$.

הוכחה. יהי $u \in W$. נבדוק האם מתקיים התנאי $\langle v - \pi_B(v), u\rangle = 0$.
נציג את u כצירוף לינארי של איברי B:

$$u = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$$

אם כן,

$$\langle v, u\rangle = \overline{\alpha}_1\langle v, w_1\rangle + \cdots + \overline{\alpha}_k\langle v, w_k\rangle$$

מצד שני, מתקיים:

$$\langle \pi_B(v), u\rangle = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\overline{\alpha}_1\|w_1\|^2 + \cdots + \frac{\langle v, w_k\rangle}{\|w_k\|^2}\overline{\alpha}_k\|w_k\|^2 =$$

$$= \overline{\alpha}_1\langle v, w_1\rangle + \cdots + \overline{\alpha}_k\langle v, w_k\rangle$$

לכן נקבל $\langle v - \pi_B(v), u\rangle = 0$.

□

הערה 9. $v - \pi_B(v) \in B^{\perp}$.

הוכחה. באמצעות ההערה הקודמת בצירוף $W = \text{Span}(B)$ ו-$(\text{Span}(S))^{\perp} = S^{\perp}$.

□