

משפט 1. נניח $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בקטע (כלומר רציפה בכל נק' בקטע) אזי לכל $[f(b), f(a)] \cup [f(a), f(b)]$ קיים $y \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = y$. (הערה: אנו לא יודעים אם $f(a) < f(b)$ או $f(b) < f(a)$ אבל בכל מקרה אם אחד מהם מתקיים אז אחת מהקבוצות שבאיחוד המתואר היא ריקה)

הוכחה. נניח בה"כ ש- $f(a) < f(b)$. יהי $y \in [f(a), f(b)]$, ונגדיר את $g(x) = f(x) - y$. נשים לב ש- $f(c) = y$ אם ורק אם $g(c) = 0$ ולכן נוביח שקיים c שמאפס את g . כעת נגדיר $E = \{x \in [a, b] \mid g(x) \leq 0\}$ ונשים לב ש- $a \in E$. נגדיר $c = \sup E$ ומכאן ש- $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E$. בעצם $c_n \rightarrow c$ ומהרציפות של g בסכום של רציפות נובע ש- $g(c_n) = g(c)$ וכיוון ש- $g(c_n) \leq 0$ גם $g(c) \leq 0$. כעת נניח בשלילה ש- $g(c) < 0$ ואז מהרציפות

$$\exists \delta > 0 \forall 0 < x - c < \delta : |g(x) - g(c)| < -\frac{g(c)}{2} \Rightarrow g(x) < \frac{g(c)}{2} < 0$$

אבל זה סותר את זה ש- $c = \sup E$ משום שיש טווח של x ים שגדולים ממנו ועדיין $g(x) < 0$. מכאן שבהכרח $g(c) = 0$ ומצאנו את הדרוש \square