

אומרים ש- $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$  מונוטונית עולה אם  $\forall x, y \in A : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  ומונוטונית יורדת אם  $\forall x, y \in A : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$   
 אם  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית אזי קיימים  $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)$  והם  $\sup_{x \in (a,b)} f(x), \inf_{x \in (a,b)} f(x)$  (לאו דווקא בהתאמה, זה תלוי אם מונוטונית עולה או יורדת)

*הוכחה.* נתרכז במקרה ש- $f$  מונו' עולה. נגדיר בשביל הפשטות  $Q = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$ .  
 מתקיים  $\forall x \in (a, b) : f(x) \leq Q$ . יהי  $\varepsilon > 0$  ולכן קיים  $x_0$  כך ש- $Q - \varepsilon < f(x_0) \leq Q$ .  
 ואז מתקיים ש- $Q - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq Q$   $\forall x > x_0$  לכן אם ניקח את  $\delta = b - x_0$ ,  
 יתקיים ש- $|f(x) - Q| < \varepsilon \Rightarrow |x - b| < \delta$ .  $\forall x : |x - b| < \delta$  לכן לפי הגדרת הגבול נקבל את הדרוש,  
 ובאופן דומה קל להוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$   $\square$

מסקנה: אם פונקציה מונוטונית בקטע  $(a, b)$  וחסומה אז קיימים  $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)$  סופיים