1 חקירת פונקציות

בעת נרצה לדעת איך פונקציה מתנהגת, ולחקור אותה. בעת חקירה עונים על הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה של פונקציה.
2. קביעת זוגיות / אי-זוגיות.
3. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.
4. קביעת נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.
5. חישוב אסימפטוטות (מאונכות ומשופעות).
6. נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
7. בדיקת ההתנהגות בקצוות ($\pm\infty$).
8. שרטוט גרף הפונקציה על פי כל הנתונים הנ"ל.

בעת נפרט את כל סעיפי החקירה.

1.1 תחום הגדרה

בשלב הראשון בחקירת פונקציה, מוצאים את תחום ההגדרה שלה. כדי לקבוע את תחום ההגדרה, צריך לבדוק:

1. המכנה של כל שבר אינו אפס.
2. כל מה שבתוך שורש הוא אי-שלילי.
3. כל מה שבתוך לוגריתם הוא חיובי.
4. מה שבתוך טנגנס אינו מהצורה $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

2.1 קביעת זוגיות ואי-זוגיות

הגדרה 1. פונקציה נקראת **זוגית** אם לכל x מתקיים $f(x) = f(-x)$. המשמעות הגיאומטרית: גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר y (הישר $x = 0$).
פונקציה נקראת **אי-זוגית** אם לכל x מתקיים $f(x) = -f(-x)$. המשמעות הגיאומטרית: גרף הפונקציה סימטרי ביחס לישר $y = x$.

דוגמה 1.
1. הפונקציות $x^2, x^4, \cos(x)$ זוגיות.
2. הפונקציות $x, x^3, \frac{1}{x}, \sin(x), \tan(x)$ אי-זוגיות.
3. הפונקציה 0 גם זוגית וגם אי-זוגית (והיא היחידה שמשני הסוגים).
4. הפונקציה e^x אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

בדי לקבוע אם פונקציה זוגית או אי-זוגית, רושמים את $f(-x)$ ומנסים לבדוק למה הוא שווה. יש כמה כללים:

משפט 1. *יש לנו כמה כללים לקביעת זוגיות או אי-זוגיות:*

1. *סכום:*
   (א) *סכום של פונקציות זוגיות הוא פונקציה זוגית.*
   (ב) *סכום של פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.*
2. *מכפלה:*
   (א) *מכפלה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.*
   (ב) *מכפלה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.*
   (ג) *מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.*
3. *הרכבה:*
   (א) *הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.*
   (ב) *הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.*
   (ג) *הרכבה של פונקציה על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית (כלומר, אם f זוגית ואם g פונקציה אז $g \circ f$ זוגית).*
4. *גזירה:*
   (א) *נגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית.*
   (ב) *נגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.*
5. *אינטגרציה (למרות שעוד לא למדנו):*
   (א) *פונקציה קדומה של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.*
   (ב) *לפונקציה זוגית יש רק פונקציה קדומה אחת שהיא אי-זוגית (זו שבה המקדם החופשי הוא אפס).*
   (ג) *האינטגרל של פונקציה אי-זוגית על קטע סימטרי (סופי) הוא אפס.*
6. *לכל פונקציה אי-זוגית f מתקיים $f(0) = 0$.*

3.1 מציאת נקודות קיצון וקביעת תחומי עלייה וירידה

ניזכר בהגדרה של נקודות מינימום ומקסימום:

הגדרה 2. תהי $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה. נקודה $x \in (a,b)$ נקראת **נקודת מינימום (מקומי)** של f, אם קיימת ל-x סביבה שבה הערך של f ב-x קטן (או שווה) משאר הנקודות בסביבה. נקודה $x \in (a,b)$ נקראת **נקודת מקסימום (מקומי)** של f, אם קיימת ל-x סביבה שבה הערך של f ב-x גדול (או שווה) משאר הנקודות בסביבה.

הגדרה 3. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה.

1. נאמר ש-f **עולה** בקטע I (כאשר $I\subseteq(a,b)$), אם לכל $x,y\in I$,
$$x>y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$$
2. נאמר ש-f **עולה ממש** בקטע I (כאשר $I\subseteq(a,b)$), אם לכל $x,y\in I$,
$$x>y\Rightarrow f(x)>f(y)$$
3. נאמר ש-f **יורדת** בקטע I (כאשר $I\subseteq(a,b)$), אם לכל $x,y\in I$,
$$x>y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$$
4. נאמר ש-f **יורדת ממש** בקטע I (כאשר $I\subseteq(a,b)$), אם לכל $x,y\in I$,
$$x>y\Rightarrow f(x)<f(y)$$

כשמחפשים נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נעזרים במשפטים הבאים:

משפט 2 (למת פרמה)**.** *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש-$x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון מקומי (ז"א, מינימום מקומי או מקסימום מקומי).* **אם** *f גזירה ב-x_0, אזי $f'(x_0)=0$.*

משפט 3. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה בקטע (a,b).*

1. *f עולה אם ורק אם הנגזרת אי-שלילית.*
2. *f עולה ממש אם ורק אם הנגזרת חיובית.*
3. *f יורדת אם ורק אם הנגזרת אי-חיובית.*
4. *f יורדת ממש אם ורק אם הנגזרת שלילית.*

מהמשפט אנו לומדים כיצד לחפש נקודות קיצון: גוזרים את הפונקציה, ומחפשים את כל הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת. הנקודות החשודות לקיצון הן הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת או אינה מוגדרת (אבל הפונקציה כן מוגדרת). אז עורכים טבלה, ומשלימים את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

יש לנו עוד כלי די נחמד למציאת קיצון, המסתמך על נגזרות מסדר גבוה:

משפט 4. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה n פעמים בקטע (a,b), ותהי $x_0\in(a,b)$. נניח ש-$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, אבל $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.*

1. *אם n אי-זוגי, x_0 אינה נקודת קיצון.*
2. *אם n זוגי ואם $f^{(n)}(x_0)>0$, אזי x_0 נקודת מינימום מקומי.*
3. *אם n זוגי ואם $f^{(n)}(x_0)<0$, אזי x_0 נקודת מקסימום מקומי.*

4.1 מציאת נקודות פיתול וקביעת תחומי קמירות וקעירות

עכשיו רוצים להבין האם לפונקציה יש מצב רוח (ואז היא מחייכת) או שאין לה מצב רוח (ואז היא עצובה).

הגדרה 4. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה.

1. אומרים ש-f **קמורה**, אם היא מחייכת, כלומר אם הישר העובר בין כל שתי נקודות נמצא מעל גרף הפונקציה.

   בסימנים מתמטיים, לכל $x_1,x_2\in(a,b)$ ולכל $0<\lambda<1$, מתקיים

   $$f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\le f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$$

2. אומרים ש-f **קמורה ממש**, אם אי-השוויון הנ"ל הוא אי-שוויון חזק (כלומר יש $<$ תמיד ולא רק $\le$).

3. אומרים ש-f **קעורה**, אם היא עצובה, כלומר אם הישר העובר בין כל שתי נקודות נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

   בסימנים מתמטיים, לכל $x_1,x_2\in(a,b)$ ולכל $0<\lambda<1$, מתקיים

   $$f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\ge f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$$

4. אומרים ש-f **קעורה ממש**, אם אי-השוויון הנ"ל הוא אי-שוויון חזק (כלומר יש $>$ תמיד ולא רק $\ge$).

במילים פשוטות, פונקציה היא קמורה אם היא נראית כמו קערה, והיא קעורה אם היא נראית כמו קערה הפוכה. מתרגמים.

בדי לקבוע קמירות וקעירות של הפונקציה, נשתמש בשני המשפטים הבאים:

משפט 5. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.*

1. *f היא קמורה אם ורק אם f' עולה.*
2. *f היא קמורה ממש אם ורק אם f' עולה ממש.*
3. *f היא קעורה אם ורק אם f' יורדת.*
4. *f היא קעורה ממש אם ורק אם f' יורדת ממש.*

משפט 6. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.*

1. *f היא קמורה אם ורק אם f'' אי-שלילית.*
2. *f היא קמורה ממש אם ורק אם f'' חיובית (ולא מתאפסת).*
3. *f היא קעורה אם ורק אם f'' אי-חיובית.*
4. *f היא קעורה ממש אם ורק אם f'' שלילית (ולא מתאפסת).*

כעת נתעניין בנקודות שבהן אנו עוברים בין התחומים.

הגדרה 5. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה. נקודה $x_0\in(a,b)$ נקראת* ***נקודת פיתול****, אם מצד אחד שלה הפונקציה קעורה, ומהצד השני הפונקציה קמורה (לא משנה מאיזה צד; העיקר שיש החלפה בין הקעירות לקמירות).*

כדי למצוא נקודות פיתול, יש משפט בדומה לנקודות קיצון:

משפט 7. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, ותהי נקודה $x_0\in(a,b)$. אם x_0 נקודת פיתול, אזי $f''(x_0)=0$.*

לסיכום, כדי למצוא נקודות פיתול גוזרים את הפונקציה פעמיים. הנקודות החשודות הן כל הנקודות שבהן הנגזרת השנייה מתאפסת או אינה מוגדרת (אבל f כן מוגדרת). אז עורכים טבלה, ובודקים את תחומי הקמירות והקעירות.

הערה 1. במשפט שהיה קודם, לגבי קיצון עם נגזרות מסדר גבוה - אם n זוגי, הנקודה היא נקודת פיתול.

5.1 מציאת אסימפטוטות מאונכות ומשופעות

רוצים להבין כיצד הפונקציה f מתנהגת בנקודות שבהן היא אינה מוגדרת ובשאיפה ל-$\pm\infty$.

הגדרה 6. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה.* **אסימפטוטה** *היא קו ישר, כך שככל שמתרחקים מראשית הצירים, המרחק בין הישר לפונקציה שואף לאפס. יש שני סוגי אסימפטוטות שאנו מתעניינים בהן:*

1. **אסימפטוטה מאונכת** *או* **אסימפטוטה אנכית** *- היא מהצורה $x=a$, כאשר הפונקציה f שואפת לאינסוף (או למינוס אינסוף) מימין, משמאל או משני הצדדים בנקודה a.*
2. **אסימפטוטה משופעת** *- היא מהצורה $y=ax+b$, כך ש-$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (או בשאיפה ל-$-\infty$). המקרה הזה מכליל את המקרה של* **אסימפטוטה אופקית** *המוכר מהתיכון, כאשר $a=0$.*

הערה 2. הדרך למציאת אסימפטוטות:

1. *אסימפטוטות מאונכות - מסתכלים על הקצוות של תחום ההגדרה או בנקודות בודדות שבהן הפונקציה אינה מוגדרת, ובודקים את הגבולות בהם. למשל, אם הפונקציה מוגדרת לכל $x>2$ ו-$x\neq 4$, בודקים את הנקודות 2 ו-4.*
2. *אסימפטוטות משופעות - צריך לבדוק גם עבור ∞ וגם עבור $-\infty$. הנוסחה לאסימפטוטה משופעת (למשל, באינסוף): $y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת אם ורק אם $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ו-$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.*

6.1 נקודות חיתוך עם הצירים

פה אין מה לפרט; נקודות החיתוך עם ציר x הן הנקודות שבהן $f(x)=0$, ונקודת החיתוך עם ציר y היא הנקודה $(0,f(0))$.

7.1 קביעת התנהגות הפונקציה ב-$\pm\infty$

פה צריך לקבוע מהם הגבולות של $f(x)$ כש-x שואף ל-∞ או ל-$-\infty$. אם יש אסימפטוטה משופעת קל לדעת מה ההתנהגות (בהתאם לאסימפטוטה).

8.1 שרטוט גרף הפונקציה

כעת נותר להירגע ולשרטט את גרף הפונקציה. חשוב:

1. *לציין בשרטוט את נקודות החיתוך עם הצירים, את נקודות הקיצון ואת נקודות הפיתול.*
2. *לשרטט בקו מקווקו את האסימפטוטות (ולרשום את משוואותיהן).*
3. *להקפיד על תחומי העלייה והירידה ועל תחומי הקמירות והקעירות.*