

משפט 1. נניח $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0} = Q(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$ כאשר P, Q פולינומים מדרגה קטנה או שווה ל- n אזי $P(x) = Q(x)$

הוכחה.

$$P(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0} = Q(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0} \Rightarrow P(x) - Q(x) = o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$$

$$P(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2 + \dots + p_n(x-x_0)^n, Q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \dots + q_n(x-x_0)^n \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^n (p_k - q_k)x^k = o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)(x-x_0) + \dots + (p_n - q_n)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0$$

אבל הגבול הזה קיים רק אם כל המקדמים (חוץ מהאחרון) של $x-x_0$ הם אפסים והגבול

מתאפס אם המקדם האחרון הוא 0. לסיכום $p_k - q_k = 0$ ואז $p_k = q_k$.

לכן $P(x) = Q(x)$ \square

משפט 2. נניח $f \in D^n(a, b)$ וקיים פולינום $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k(x-x_0)^k$ עבור $x_0 \in (a, b)$

כך ש- $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$, אזי $p_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. במילים אחרות, הפולינום הוא פולינום הטיילור מדרגה n של f סביב x_0 .

הוכחה. ראינו כבר שפולינום הטיילור $P_n(x)$ מקיים $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$

. לפי המשפט הקודם מתקיים בהכרח ש- $P(x) = P_n(x)$ וסיימנו \square

דוגמה: ראינו בעבר שעבור $|x| \leq 1$ מתקיים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ובפרט אם נציב x^2 נקבל

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

לכן אפשר להראות ש- $p_k = \begin{cases} 0 & \text{odd is k if} \\ 1 & \text{even is k if} \end{cases}$ מהמשפט שהרגע הוכחנו נראה כי:

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{odd is k if} \\ k! & \text{even is k if} \end{cases}$$

משום ש- $p_k = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(k)}(0)}{k!}$. ככה לדוגמה אנחנו יכולים לחשב את הנגזרת ה-2015 של הפונקציה ב-0 (יוצא 0) ואת הנגזרת ה-2016 ב-0 (יוצא 2016!) בקלות.