משפט 1. *תהי* $f \in D^{n+1}(a,b)$ *אזי*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר $c \in [x_0, x] \cup [x, x_0]$ *(לא ידוע מי קטן יותר ממי), דרך אחרת לכתוב את זה היא* $\exists 0 \le t \le 1 : c = x_0 + t(x-x_0)$ *. במילים אחרות*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c *תלוי ב-* x *.*

הוכחה. יהיו x, x_0 אזי מההגדרה $R_n(x,x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
בעת נגדיר $\varphi(t) = R_n(x,t)$ ונראה ש-

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

נגדיר גם בשביל הפשטות $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$
נניח בה"כ ש- $x < x_0$, ועבור המצב ההפוך נעשה באופן אנלוגי:
ממשפט הערך הממוצע של קושי נקבל ש- $\exists c : \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$
בעת נשים לב ש-

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)' = 0 - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)'$$

(הנגזרת של $f(x)$ זה 0 משום שזהו מספר קבוע כי קבענו את x בהתחלה) . בעת אם נשתמש בכלל לייבניץ ונגזור בזהירות, נשים לב שזה פשוט $-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$
עכשיו אם נחזור למסקנה של משפט קושי,

$$\exists c : \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} =$$

$$\frac{R_n(x,x_0) - 0}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

דוגמה 1. חשב את $\log 1.5$ בקירוב של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
פתרון: נסתכל על $f(x) = \log(1+x)$. נראה כי

$$P_7(x,0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$$

לפי לגרנז' השארית $f(0.5) - P_7(0.5,0) = R_7(0.5,0) = \frac{f^{(8)}(c)}{8!}(0.5-0)^8$ עבור $0 < c < 0.5$

$$|f^{(8)}(c)| = \left| -\frac{5040}{(1+c)^8} \right| \le \frac{5040}{(1+0)^5} = 5040$$

(אי השיוויון נכון משום ש-$c \in (0, 0.5)$)
מכאן ש-

$$|f(0.5) - P_7(0.5, 0)| \leq \frac{5040}{8!} 0.5^8 < 0.001$$

לכן הפולינום מסדר 7 נותן קירוב טוב מספיק, ואז אם נציב $x = 0.5$ נקבל מספר ש-3 הספרות הראשונות שלו אחרי הנקודה הן 0.405 ולכן אם ניקח את הקירוב ל-2 ספרות אחרי הנקודה נקבל 0.41 .