

נניח שאנו מחפשים את הגבול של $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$. אם אחת הפונקציות שואפת ל-0 או אחת הפונקציות שואפת לאינסוף או יודעים די בקלות למה הגבול הזה שווה, ואם שתי הפונקציות שואפות למספר שהוא לא 0 גם קל מאריתמטיקה פשוטה של גבולות למצוא את הגבול של המנה. אבל מה קורה במצב של $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$? אנחנו בבעיה, ופה נכנס כלל לופיטל (L'Hospital) שבכלל התגלה ע"י ברנולי.

הגדרה 1. עבור $p \in \mathbb{R}$ נגדיר את הסביבה $U_\delta(p)$ להיות $(p - \delta, p + \delta)$. אם $p = \infty$ אז $U_\delta(p) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$ ועבור $p = -\infty$ נגדיר $U_\delta(p) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$.

משפט 1. נניח f, g גזירות ב- $U_{\delta_0}(p)$ עבור $\delta_0 > 0$. נניח גם ש- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ קיים במובן הרחב (יכול להיות ∞ או $-\infty$). אם אחד מהבאים מתקיים:

$$1. \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \infty$$

אזי גם קיים הגבול של המנה והוא שווה ל- L

צריך לשים לב שהדרישה שהגבול של מנת הנגזרות קיים הוא הכרחי. לדוגמה, אם ניקח את $f(x) = x + \sin x$ ו- $g(x) = x$ אז בקלות נראה ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ אבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

הוכחה. תהי (α, β) סביבה של L . אזי עבור תת סביבה $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ מהגדרת הגבול

$$\forall x \in U_\delta(p) : \alpha' < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta'$$

נעת יהיו $x, x_1 \in U_\delta(p)$ אבל מצד אחד בלבד! (אם $p = \pm\infty$ כמובן שזה לא בעיה).

לפי קושי $\exists c : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}$ (פה נכנס העובדה שהם רק מצד אחד, משום שאחרת אולי $c = p$ ואנחנו רוצים להמנע ממצב כזה).

(בה"כ g לא מתאפסת בסביבת p משום שאם מתאפסת אינסוף פעמים אז אפשר לפי רול

למצוא נקודה בה $g'(c) = 0$ ואם היא מתאפסת מספר סופי של פעמים פשוט נצמצם את

הסביבה (δ) מספיק כך שכבר לא יהיה כך.)

נוכיח את מצב 1:

בגבול בו $x_1 \rightarrow p$ מקבלים ש-

$$\lim_{c \rightarrow p} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$$

אבל

$$\alpha < \alpha' < \frac{f'(c)}{g'(c)} < \beta' < \beta \Rightarrow$$

$$\alpha < \alpha' \leq \lim_{c \rightarrow p} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta' < \beta$$

ואז קיבלנו שלכל סביבה של L יש סביבה מנוקבת של p בה $\frac{f(x)}{g(x)}$ נמצא בסביבה של L

, ומהגדרת הגבול נקבל ש- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ נוכיח את מצב 2:

ראינו ש-

$$\alpha'(g(x) - g(x_1)) < f(x) - f(x_1) < \beta'(g(x) - g(x_1))$$

$$\alpha' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

ונשים לב שהצדדים שואפים ל- α', β' ומכאן שעבור סביבה מספיק קטנה של p נקבל עדיין ש-

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta$$

ומאותה סיבה קודם נקבל את הדרוש

□