משפט 1. *אם $f \in D(a,b)$ אז לנגזרת אין נק' רציפות מסוג ראשון.*
במילים אחרות, עבור $x_0 \in (a,b)$ אם קיימים $\lim_{x\to x_0^-} f'(x), \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ אזי הם שווים לנגזרת בנקודה (ובפרט שווים ביניהם)

הוכחה. f גזירה ב- x_0 ולכן הנגזרות החד צדדיות קיימות ושוות לנגזרת בנקודה.
לפי משפט לגרנז' $\exists_c : f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. אם נניח ש- $x < x_0$ נקבל ש-

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{c\to x_0^-} f'(c)$$

ובאופן דומה

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{c\to x_0^+} f'(c)$$

אבל הנגזרות החד צדדיות שוות ומכאן ש-

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

□

דוגמה:
$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ פונקציה גזירה עם נגזרת לא רציפה. ברור שהנגזרת קיימת ורציפה בכל מקום שהוא לא $x=0$ (כפל והרכבה של פונקציות גזירות ברציפות).
אם $x=0$ אז קודם נבדוק רציפות ואז גזירות. רציפות:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

משום שזה מקרה של פונקציה חסומה כפול פונקציה ששואפת ל-0. כעת נבדוק גזירות:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

מאותה סיבה בדיוק. אבל עבור $x \neq 0$ מתקיים ש- $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ והגבול $\lim_{x\to 0} f'(x)$ לא קיים ומכאן שהנגזרת לא רציפה.