משפט 1. *נניח $f:(a,b)\to(c,d), g:(c,d)\to\mathbb{R}$ נסמן את $h=g\circ f$ כלומר $h(x)=g(f(x))$. אם f דיפרנציאבילית ב- x_0 ו- g דיפרנציאבילית ב- $f(x_0)$ אזי h דיפרנציאבילית ב- x_0 ומתקיים: (הצורות שקולות)*

$$h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$
$$\frac{dh}{dx}(x_0)=\frac{dg}{df}(f(x_0))\cdot\frac{df}{dx}(x_0)$$

אם הכתיב האחרון נראה לכם מוזר ועושה לכם כאב ראש, אל תדאגו, זה בעיקר בשביל הפיזיקאים, אבל בכל מקרה הנה דוגמה:

אם נגדיר $g(u)=\sin u$ אבל $u(x)=x^2$ אז הנגזרת של $h(x)=g(u(x))=\sin x^2$ היא $\frac{dg}{du}(u(x))\cdot\frac{du}{dx}$ אבל $\frac{dg}{du}=\cos u$ ו- $\frac{du}{dx}=2x$ ולכן סך הכל נקבל

$$\cos(u(x))\cdot 2x=\cos(x^2)\cdot 2x$$

הוכחה. ידוע ש-

$$f(x_0+t)=f(x_0)+f'(x_0)t+\epsilon_1(t)\cdot t$$

כש- $\epsilon_1(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$ ובנוסף,

$$g(y_0+s)=g(y_0)+g'(y_0)s+\epsilon_2(s)\cdot s$$

כש- $\epsilon_2(s)\xrightarrow[s\to 0]{}0$. לכן:

$$h(x_0+t)=g((f(x_0+t))=g\left(f(x_0)+f'(x_0)t+\epsilon_1(t)\cdot t\right)=$$
$$g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f'(x_0)t+\epsilon_1(t)\cdot t)+\epsilon_2(f'(x_0)t+\epsilon_1(t))\cdot(f'(x_0)t+\epsilon_1(t))=$$
$$g(f(x_0))+g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot t+o(t)_{t\to 0}\Rightarrow(g(f(x)))'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

□

מסקנה 2. *הנגזרת של x^α היא $\alpha x^{\alpha-1}$, גם אם $\alpha\notin\mathbb{N}$*

הוכחה.

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=(e^{\alpha\ln x})\cdot(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

□

דוגמה 1.

$$(\cos x)'=\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin x$$

$\Leftarrow$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$