משפט 1. *נניח $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירות ב- x_0 אזי הפונקציות הבאות גזירות ומתקיים:*

1. *$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$ עבור α,β קבועים.*
2. *$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$ (זה נקרא כלל לייבניץ)*
3. *במידה ו- $g(x_0)\neq 0$ אז מוגדרת הנגזרת $(\frac{1}{g(x)})'(x_0)$ והיא שווה ל- $-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$*
4. *במידה ו- $g(x_0)\neq 0$ אז מוגדרת הנגזרת $(\frac{f(x)}{g(x)})'(x_0)$ והיא שווה ל- $\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$*

הוכחה. .1

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha f(x)+\beta g(x)-\alpha f(x_0)-\beta g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\beta\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

.2

$$f(x_0+t)\cdot g(x_0+t)=(f(x_0)+f'(x_0)t+o(t))(g(x_0)+g'(x_0)t+o(t))=$$

$$f(x_0)g(x_0)+(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))t+o(t)$$

וממה שראינו על הדיפרנציאל, $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

.3

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{1}{g(x_0)g(x)}\frac{g(x_0)-g(x)}{(x-x_0)}\xrightarrow[x\to x_0]{}\frac{1}{(g(x_0))^2}\cdot -g'(x_0)$$

.4

$$(\frac{f}{g})'(x_0)=(f\cdot\frac{1}{g})'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\square$

משפט 2. $(x^n)'=nx^{n-1}$

הוכחה. באינדוקציה, ראינו שעבור $n=1$ זהו קו ישר שהנגזרת שלו היא $1=1\cdot x^0$. בעת נניח שזה נכון עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$(x^n)'=(x\cdot x^{n-1})'=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}=x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}=nx^{n-1}$$

$\square$