משפט 1. *אם f רבמ"ש על קטע סופי אזי היא חסומה שם.*

הערה 1. המשפט ההפוך לא נכון, לדוגמה $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ב- $(0,1)$

הוכחה. נניח בשלילה ש- f לא חסומה מלעיל, ועבור חסומה מלרע ההוכחה דומה. מההנחה מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : x_n > n$$

נניח בה"כ שהמרחק בין איברי x_n גדול או שווה ל-1, משום שאם זה לא המצב אפשר לקחת תת סדרה שתקיים את זה. כיוון ש- x_n סדרה חסומה (מוכלת בקטע סופי) יש לה תת סדרה מתכנסת $y_k = x_{n_k}$. בעת נסתכל על הסדרה y_k ועל הסדרה y_{k+1} , כיוון שהסדרות מתכנסות לאותו דבר, $|y_{k+1} - y_k| \to 0$ אבל מצד שני $|f(y_{k+1}) - f(y_k)| \geq 1$, ולכן הפונקציה לא רבמ"ש.

□

משפט 2. *משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור וסופי, רציפה שם במ"ש*

הוכחה. תהי f רציפה על קטע סגור וסופי $[a,b]$. נניח בשלילה שהיא לא רציפה שם במ"ש. לכן קיים אפסילון גדול מאפס, כך שלכל דלתא גדול מאפס, יש שתי נקודות במרחק קטן מדלתא כך שהפרש התמונות שלהן גדול או שווה לאפסילון. ניתן אם כך לבנות סדרה של זוגות של נקודות x_n, y_n כך שמתקיים $x_n - y_n \to 0$ אבל $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.
לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס לסדרות, יש לx_n תת סדרה מתכנסת x_{n_k} (כיוון שהקטע סופי, הסדרה חסומה).
בנוסף, לתת הסדרה y_{n_k} יש תת סדרה מתכנסת. אם כך, בנינו זוג סדרות מתכנסות המקיימות את התנאים:

$$x'_n - y'_n \to 0 \text{ and } |f(x'_n) - f(y'_n)| \geq \varepsilon$$

אבל כיוון שזה קטע סגור, נקודת הגבול של הסדרות המתכנסות שייכת לקטע (נקודת הגבול בינהן זהה כי המרחק בינהן שואף לאפס). לכן, לפי רציפות,

$$\lim f(x'_n) = \lim f(y'_n)$$

בסתירה.

□

משפט 3. *אם f רציפה במ"ש על הקטעים $(a,b], [b,c)$ (לאו דווקא קצות סופיים), אזי היא רציפה במ"ש באיחוד (a,c)*

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$.
f רציפה במ"ש ב $(a,b]$ ולכן קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x,y \in (a,b]$ המקיימים $|x-y| < \delta_1$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
f רציפה במ"ש ב $[b,c)$ ולכן קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x,y \in [b,c)$ המקיימים $|x-y| < \delta_2$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
יהי $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. אזי $\delta > 0$. נראה שלכל $x,y \in (a,c)$ המקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. נניח $x,y \in (a,c)$ כך ש $|x-y| < \delta$. יתכנו שלושה מצבים:
א) $x,y \in (a,b]$. אזי $|x-y| < \delta \leq \delta_1$ ומכאן $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
ב) $x,y \in [b,c)$ ומכיוון ש $|x-y| < \delta \leq \delta_2$ נסיק ש $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
ג) אחת מהנקודות ב $(a,b]$ והשניה ב $[b,c)$. נניח בה"כ ש $x \in (a,b]$ ו $y \in [b,c)$. מכאן $|x-b| \leq |x-y| < \delta \leq \delta_1$ וכן $|y-b| \leq |x-y| < \delta \leq \delta_2$. מכאן $|f(x) - f(b)| < \frac{\epsilon}{2}$

וכמו כן $|f(b)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$. כעת ניעזר באי שוויון המשולש כדי לקבל $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(b)|+|f(b)-f(y)|<\epsilon$

$\square$

משפט 4. *תהי f רציפה על קטע חצי אינסופי מהצורה $[a,\infty)$, כך שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ קיים וסופי, אזי f רציפה במ"ש על הקטע $[a,\infty)$.*

הוכחה. יהי אפסילון גדול מאפס, צריך למצוא דלתא גדול מאפס כך שאם המרחק בין זוג נקודות בקטע קטן מדלתא, המרחק בין התמונות שלהן תחת הפונקציה קטן מאפסילון.

לפי הנתון, קיים M כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}$.

לכן לכל $x_1,x_2>M$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$ (בעזרת אי שיוויון המשולש).

כעת, לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש בקטע $[a,M+1]$, ולכן קיים דלתא כך שלכל זוג נקודות $a\leq x_1,x_2\leq M+1$ הקרובות עד כדי דלתא, מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$.

אם ניקח מרחק שקטן או שווה למינימום שבין דלתא לבין אחד, יתקיים שאם $|x_1-x_2|<\delta$ אזי שתי הנקודות נמצאות בקטע $[M,\infty)$ או בקטע $[a,M+1]$ ולכן ההפרש בין התמונות שלהן תחת f הוא קטן מאפסילון כפי שרצינו.

$\square$

תהי f פונקציה רציפה על קטע לאו דווקא סופי, אזי אם הגבולות של הפונקציה בקצות הקטע קיימים וסופיים, הפונקציה רציפה במ"ש בקטע. זה לא נכון בכיוון ההפוך, לדוגמה $f(x)=x$ מפריכה.

הוכחה. אם הקטע הוא מהסוג $<a,b>$ אזי אפשר להרחיב את הפונקציה ל- $[a,b]$ ובקצוות הפונקציה תקבל את הגבולות החד צדדיים. מכאן שהפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן רבמ"ש שם ובפרט תהיה רבמ"ש בתת קטע $<a,b>$

אם הקטע מהצורה $[a,\infty)$ הוכחנו

אם הקטע מהצורה $(-\infty,\infty)$ אז ניקח נקודה באמצע ונעשה חלוקה לקטעים ובכל קטע הפונקציה רבמ"ש ולכן גם ב- $(-\infty,\infty)$ $\square$