הגדרה 1. 1. פונקציה $f:A\to B$ נקראת "חד-חד ערכית" (או בקיצור חח"ע) אם לכל $x\neq y$ ב-A מתקיים ש- $f(x)\neq f(y)$.

2. הפונקציה נקראת "על" אם $\forall_{y\in B}\exists_{x\in A}:f(x)=y$.

3. במקרה שפונקציה היא חח"ע ועל אומרים שהיא "הפיכה", משום שאפשר להגדיר $f^{-1}:B\to A$ כך ש- $f^{-1}\circ f=Id_A, f\circ f^{-1}=Id_B$, או במילים אחרות $\forall x\in A:f^{-1}(f(x))=x,\forall y\in B:f(f^{-1}(y))=y$

הגדרה 2. פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ נקראת מונוטונית עולה ממש אם $\forall x<y:f(x)<f(y)$ ובאופן אנלוגי מונוטוני יורדת ממש.

סימון: כאשר נסמן $<a,b>$ הכוונה היא לאחת מהאפשרויות $[a,b),(a,b],[a,b],(a,b)$ (כל אחת תתאים).

משפט 1. *נניח ש- $f:<a,b>\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f חח'ע אם ורק אם f מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש.*

הוכחה. $\boxed{\Rightarrow}$ טריוויאלי מההגדרה

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח f לא מונוטונית ממש, ולכן

$$\exists x_1<x_2:f(x_1)\leq f(x_2),\exists x_3<x_4 f(x_3)\geq f(x_4)$$

(כך לא מונוטונית יורדת ולא מונוטונית עולה) . לכן

$$\exists\alpha,\beta,\gamma\in\{x_1,x_2,x_3,x_4\}:\alpha<\beta<\gamma\wedge f(\beta)\geq f(\alpha),f(\gamma)$$

ואם נניח בה"כ ש- $f(\alpha)<f(\gamma)$ אזי נזכור ש- f רציפה ועבור $t\in(f(\gamma),f(\beta))$ לפי משפט ערך הביניים $\exists c_1\in[\alpha,\beta]:f(c_1)=t,\exists c_2\in[\beta,\gamma]:f(c_2)=t$ ומכאן ש- f אינה חח"ע. □

הבחנה:

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע ומונוטונית ממש בו. ממשפט וויירשטראס ניתן להגדיר $d=\sup f,c=\inf f$ סופיים ואז אפשר לצמצם את טווח הפונקציה מכל $\mathbb{R}$ אל $[c,d]$. בעת מהמשפט השני של וויירשטראס f מקבלת את הערכים האלו ולכן $c,d\in\operatorname{Im} f$ וממשפט ערך הביניים נסיק כי $f:[a,b]\to[c,d]$ פונקציה על וכיוון שהיא גם מונוטונית ממש אז היא חח"ע ואז הפיכה. בעת אפשר לדבר על f^{-1} במקרה הזה.

משפט 2. *באותם התנאים של ההבחנה הקודמת, הפונקציה $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ רציפה ומונוטונית ממש .*

הוכחה. מספיק להראות עבור f מונוטונית עולה ממש ועבור יורדת ממש נוכיח באופן אנלוגי.

יהיו $y_1<y_2\in[c,d]$ ונראה כי $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ משום שאחרת מזה ש- f מונוטונית עולה ממש נקבל ש- $y_1=f(f^{-1}(y_1))\geq f(f^{-1}(y_2))=y_2$ בסתירה לכך ש- $y_1>y_2$.

בעת בתור פונקציה מונוטונית עולה ממש, ובפרט מונוטונית, נק' אי הרציפות של הפונקציה הם רק מסדר ראשון. נניח y_0 נק' אי רציפות מסדר ראשון ואז $\lim_{y\to y_0^-}f^{-1}(y)<f(y_0)$ ואם נסתכל על $x\in(\lim_{y\to y_0^-}f(y),f(y_0))$ נראה שאין לו מקור משום שהפונקציה מונוטונית עולה ממש, בסתירה להגדרה של פונקציה הפוכה! □