משפט 1. *תהי* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *רציפה בכל הקטע אזי*

1. f *חסומה בקטע* $[a,b]$
2. $$\exists x_{min}, x_{max} : f(x_{min}) = \inf_{x\in(a,b)} f(x), f(x_{max}) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

במילים אחרות, פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה שם ומקבלת את המקסימום והמינימום שלה.

הוכחה. 1. נניח בשלילה ש-f לא חסומה. אזי $\forall n \exists_{x_n} : |f(x_n)| > n$ אבל $a \le x_n \le b$ ולכן זוהי סדרה חסומה ולפי בולצאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x_0$ אבל מהרציפות של f נקבל ש- $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ למרות שמההגדרה של x_{n_k}, מתקיים ש- $|f(x_{n_k})| \to \infty$ בסתירה.

2. נסמן את החסמים בתור M, m ונשים לב ש- $-m$ החסם העליון של $-f$ ולכן אם נוכיח את הטענה עבור החסם העליון, הטענה ל-m תתקבל ישירות.
נניח בשלילה ש- f לא מקבלת את הערך M, לכן אפשר להגדיר את $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ והיא תהיה רציפה משום שהמכנה לא מתאפס. אבל לפי משפט 1 g חסומה ומכאן ש-

$$\frac{1}{M - f(x)} < C \Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{C} \Rightarrow M - \frac{1}{C} > f(x)$$

בסתירה להגדרה ש- M חסם עליון

□