הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (Cauchy sequence) אם מתקיים התנאי:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}:|x_n-x_m|<\epsilon$$

כלומר המרחק בין איברי הסדרה קטן באופן כזה שמאיזהשהו מקום בסדרה והלאה, מרחק בין 2 איברים (שיכולים להיות במקומות רחוקים כרצוננו אחד מהשני בסדרה) יהיה קטן כרצוננו.

משפט 1. *בכל תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$, אם סדרה שמורכבת מאיברי הקבוצה מתכנסת אז היא סדרת קושי (בפרט זה נכון לכל סדרה ב- $\mathbb{R}$).*

הוכחה. יהי אפסילון גדול מ-0, אזי $\exists_N\forall_{n>N}|x_n-L|<\frac{\epsilon}{2}$. לכן מתקיים:
$\forall_{n,m>N}:|x_n-x_m|=|(x_n-L)+(L-x_m)|\leq|x_n-L|+|L-x_m|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$
□

הגדרה 2. $A\subseteq\mathbb{R}$ נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי המורכבת מאיבריו מתכנסת לאיבר בתוכו.

דוגמה 1. $\mathbb{Q}$ לא שלם, כיוון שאם ניקח את

$$3,3.1,3.14,3.141,3.1415,3.14159,\dots\to\pi\notin\mathbb{Q}$$

זוהי סדרה שמתכנסת ב- $\mathbb{R}$ ולכן, מהמשפט הקודם, היא סדרת קושי. אבל היא סדרת קושי שמורכבת מאיברים רציונאליים ולא מתכנסת למספר רציונאלי, ולכן קבוצת המספרים הרציונאליים לא מהווה מרחב שלם.

מסקנה 2. *בכל מרחב שלם, סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.*

הוכחה. מימין לשמאל זה נכון באופן כללי מהמשפט הקודם (סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי) ומשמאל לימין נובע מההגדרה של מרחב שלם, שדורש שכל סדרת קושי תתכנס למשהו בתוכו, ובפרט תתכנס. □

משפט 3. *$\mathbb{R}$ שלם*

הוכחה. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אזי לכל אפסילון חיובי

$$\exists_N\forall_{n,m>N}|x_n-x_m|<\epsilon$$

ואז $x_m-\epsilon<x_n<x_m+\epsilon$ וזה נכון לכל $n>N$ ולכן

$$x_m-\epsilon\leq l_{N+1}\leq L_{N+1}\leq x_m+\epsilon$$

מהעברת אגפים מקבלים ש- $0\leq L_{N+1}-l_{N+1}\leq 2\epsilon$. אם ניקח לכן סדרת אפסילונים ששואפת ל-0 ובהתאם אליהם ניקח את ה- Nים המתאימים וממשפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול העליון והתחתון שווים, ואז לפי משפט הסדרה מתכנסת אליהם. □

דוגמה 2. נסתכל על

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

נראה כי המרחק בין איברים עוקבים בסדרה הולך ושואף ל-0: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, אף על פי כן, הסדרה לא תתכנס. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן אם נראה שהסדרה הזאת לא סדרת קושי, אז בהכרח היא לא מתכנסת. אכן, נראה כי

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כלומר אין מקום בו משם והלאה המרחק בין כל 2 איברים קטן מחצי, ולכן זו לא סדרת קושי.

מסקנה 4. *הטור ההרמוני, שמוגדר להיות* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *שווה לאינסוף.*

הסבר: הסדרה הזאת היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת ל- $\sup x_n$ אבל אם זה היה מספר ממשי היינו מקבלים סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת, בסתירה למה שהרגע הוכחנו. לכן בהכרח $\sup x_n = \infty$ ולשם הסדרה שואפת.