1 מאפס

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי, ותהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה. נגדיר

$$S^0 = \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in S : \varphi(v) = 0\}$$

כלומר, זה אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים המתאפסים על כל S. אזי S^0 נקרא **המאפס של** S.

הערה 1. תכונות המאפס:

1. $S^0 \subseteq V^*$ הוא תת-מרחב.

הוכחה. אם $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, ואם $\varphi_1, \varphi_2 \in S^0$, אזי לכל $v \in S$ מתקיים

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(v) = \alpha\varphi_1(v) + \beta\varphi_2(v) = 0$$

□

2. $S^0 = (\operatorname{Span} S)^0$

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית.

$\boxed{\supseteq}$ ההכלה הזו ברורה, כי אם $\varphi \in (\operatorname{Span} S)^0$, אזי לכל $v \in \operatorname{Span} S$ מתקיים $\varphi(v) = 0$, ובפרט זה נכון עבור $v \in S$.

$\boxed{\subseteq}$ יהי $\varphi \in S^0$, ויהי $v \in \operatorname{Span} S$. נסמן $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, כאשר $v_1, \ldots, v_k \in S$. אזי

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k \varphi(v_k) = 0$$

וקיבלנו הדרוש.

□

3. אם $U \subseteq V$ תת-מרחב, אזי $\dim U + \dim U^0 = \dim V$.

הוכחה. ניקח בסיס $B' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ של U, ונשלים אותו לבסיס $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ של V. נסמן $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי של B. נסתכל על הפונקציונלים $\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$, ונוכיח שהם בסיס של U^0. לצורך כך, נוכיח שהם קבוצה בת"ל ופורשת.

הם בבירור בת"ל, כחלק מבסיס.

נוסיף להם פונקציונל $\psi = \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n \in U^0$. אזי לכל $i = 1, \ldots, k$ נקבל

$$0 = \psi(v_i) = \alpha_1 \underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(v_n)}_{0} = \alpha_i$$

ולכן ψ נפרש על ידי $\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$.

לסיכום, נקבל

$$\dim U + \dim U^0 = |B'| + |\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}| = k + (n-k) = n = \dim V$$

$\square$

4. לכל $U \subseteq V$ תת-מרחב, $U^{00} = E[U] = \{\hat{u} \mid u \in U\}$.

הוכחה. $\boxed{\subseteq}$ יהי $v \in E[U]$, אזי קיים $u \in U$ שעבורו $\hat{u} = E(u) = v$. יהי $\varphi \in U^0$ פונקציונל לינארי. אזי $\hat{u}(\varphi) = \varphi(u) = 0$, ולכן $v = \hat{u} \in U^{00}$.

שוויון מימדים לפי תכונה 3, $\dim U + \dim U^0 = \dim V$, אבל גם $\dim U^0 + \dim U^{00} = \dim V$. לכן, המימדים שלהם שווים; $\dim U = \dim U^{00}$. איזומורפיזם שומר על המימד, ולכן $\dim U = \dim E[U]$. בסך הכל, $\dim U^{00} = \dim E[U]$.

הוכחנו הכלה ושוויון מימדים, ולכן יש שוויון.

$\square$