1 המרחב הדואלי השני

הגדרה 1. $V^{**}=(V^*)^*$ נקרא **המרחב הדואלי השני ל-**V.

הערה 1. $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$, ולכן $V^{**}\cong V$.

הערה 2. נחפש איזומורפיזם מהמרחב למרחב הדואלי השני. הפעם, לעומת האיזומורפיזם מהמרחב לדואלי שלו, אפשר לבנות איזומורפיזם זה בלי לבחור בסיס ב-V - איזומורפיזם טבעי.

נגדיר לכל $\varphi\in V^*$, $\hat{v}(\varphi)=\varphi(v)$ (**איזומורפיזם ההצבה**).
בדיקות:

1. נבדוק כי $\hat{v}\in V^{**}$.

$$\hat{v}(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)(v)=\alpha\varphi_1(v)+\beta\varphi_2(v)=\alpha\hat{v}(\varphi_1)+\beta\hat{v}(\varphi_2)$$

2. נסמן $E:V\to V^{**}$, כאשר $E(v)=\hat{v}$. נבדוק ש-E איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

לינאריות נבדוק האם $E(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha E(v_1)+\beta E(v_2)$. נחשב את הערך של שני הצדדים עבור איזשהו $\varphi\in V^*$:

$$E(\alpha v_1+\beta v_2)(\varphi)=(\widehat{\alpha v_1+\beta v_2})(\varphi)=\varphi(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha\varphi(v_1)+\beta\varphi(v_2)=$$

$$=\alpha\hat{v_1}(\varphi)+\beta\hat{v_2}(\varphi)=(\alpha\hat{v_1}+\beta\hat{v_2})(\varphi)=(\alpha E(v_1)+\beta E(v_2))(\varphi)$$

חח"ע נבדוק ש-E חח"ע, כלומר $\ker E=0$. יהי $v\in\ker E$, ז"א $\hat{v}=0$. נגדיר $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ויהי $B^*=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי. נשים לב כי לכל $i=1,\dots,n$ מתקיים $0=\hat{v}(\varphi_i)=\varphi_i(v)$, ולכן $[v]_B=0$, כלומר $v=0$.

ממשפט המימדים, נקבל ש-E העתקת על, ז"א E איזומורפיזם.

כל בסיס של V^* הוא דואלי לבסיס של V.

הוכחה. יהי B' בסיס של V^*, נסמן $B'=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$. נתבונן בבסיס $B''=\{e_1,\dots,e_m\}$ של V^{**} הדואלי ל-B'. ז"א, מתקיים $e_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$. נגדיר $v_i=E^{-1}(e_i)$, כאשר $E^{-1}:V^{**}\to V$ הוא האיזומורפיזם ההפוך ל-E שהגדרנו. נגדיר $B=\{v_1,dots,v_n\}$, ונוכיח $B^*=B'$. אכן, מתקיים

$$\varphi_j(v_i)=\hat{v_i}(\varphi_j)=e_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$$

$\square$