1 המרחב הדואלי

תזכורת:

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$. נתבונן ב-$\mathbb{F}$ בתור מרחב וקטורי מעל עצמו ($\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$, $\{1\}$ בסיס). אומרים שהעתקה לינארית $\varphi : V \to \mathbb{F}$ היא **פונקציונל לינארי על** V.

הגדרה 2. $V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{F}$ אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים$\}$ נקרא **המרחב הדואלי** ל-V. מגדירים עליו פעולות חיבור וכפל בסקלר, כך שהוא הופך למרחב וקטורי, בצורה הבאה:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) \qquad (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$$

הערה 1. $\dim V^* = n$, ולכן V^* איזומורפי ל-V.

בעת נרצה לכל בסיס להתאים בסיס במרחב הדואלי, "בסיס דואלי". ההתאמה הזו תייצר לנו בהמשך את האיזומורפיזם בין המרחב למרחב הדואלי.

הגדרה 3. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V. נגדיר בסיס $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ של V^*, שייקרא **הבסיס הדואלי ל-**B, על ידי

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

לכל $i = 1, \ldots, n$, ולכל $j = 1, \ldots, n$, ונמשיך כל φ_i לפי לינאריות. כלומר, אם ניקח וקטור כלשהו $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, אזי

$$\varphi_i(v) = \alpha_1 \underbrace{\varphi_i(v_1)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_i(v_n)}_{0} = \alpha_i$$

מההגדרה קיבלנו את הנוסחה

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$$

נוודא כעת שהבסיס הדואלי הוא אכן בסיס.

בת"ל נניח כי $\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0$.

נתבונן בערך של שני הצדדים עבור הווקטור v_i:

$$\alpha_1 \underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

לכן B^* בת"ל. $\dim V^* = n$, וכן $|B^*| = n$, ולכן B^* בסיס של V^*. בעיקרון, נוכל להפסיק פה, אך כעת, באמצעות הפרישה, נפתח נוסחה חשובה:

פורשת אם $\varphi \in V^*$, אזי $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(v_n)\varphi_n$.

בדיקה: נציב v_i בשני הצדדים, ונקבל:

$$\varphi(v_1)\underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \varphi(v_i)\underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \varphi(v_n)\underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0} = \varphi(v_i)$$

אם כן, נקבל נוסחה חשובה נוספת:

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

הערה 2. ציינו שתי נוסחאות חשובות קודם, ובעזרתן נבנה איזומורפיזם מפורש $V \to V^*$. ניקח בסיס B של V. נניח שנתון $v \in V$, כך שווקטור הקואורדינטות שלו ביחס לבסיס B הוא

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$$

נשלח את v ל-φ, כך שווקטור הקואורדינטות של φ לפי B^* זהה לווקטור הקואורדינטות של v לפי B, ז"א

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

אם כן, הקונסטרוקציה של האיזומורפיזם תלויה בבחירת הבסיס B; בחירות שונות של בסיסים יובילו לאיזומורפיזמים שונים.

נרצה לראות כיצד שינוי הבסיס משפיע על הבסיס הדואלי, ונמצא קשר בין מטריצות המעבר המתאימות.

משפט 1. *יהיו $B, \tilde{B}$ בסיסים של V, יהיו $B^*, \tilde{B}^*$ הבסיסים הדואליים המתאימים של V^*, תהי C מטריצת המעבר מ-B ל-$\tilde{B}$ ותהי C' מטריצת המעבר מ-B^* ל-$\tilde{B}^*$. אזי $C' = \left(C^{-1}\right)^t = \left(C^t\right)^{-1}$.*

הוכחה. נוכיח שמטריצת המעבר מ-$\tilde{B}^*$ ל-B^* שווה ל-C^t. נסמן מטריצה זו ב-$C'' = (C')^{-1}$.

נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\tilde{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\tilde{B}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. אזי

$$C'' = \begin{pmatrix} | & & | \\ [\varphi_1]_{\tilde{B}^*} & \cdots & [\varphi_n]_{\tilde{B}^*} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} - & ([w_1]_B)^t & - \\ & \vdots & \\ - & ([w_n]_B)^t & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}^t = C^t$$

הוכחנו $C'' = C^t$, ולכן $C' = (C'')^{-1} = (C^t)^{-1}$.

$\square$