1 לבסון אוניטרי ואורתוגונלי

דיברנו על שילוש אוניטרי ועל שילוש אורתוגונלי, ובעת נעבור ללכסון. ננסה להבין מתי לאופרטור יש מטריצה מייצגת אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי (או מתי מטריצה דומה למטריצה אלכסונית "על ידי מטריצה אוניטרית P").

למה 1. *כל מטריצה משולשת נורמלית היא אלכסונית.*

הוכחה. נסמן $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$. לכן, $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$. נקבל שמתקיים:

$$[AA^*]_{1,1} = a_{11}\overline{a_{11}} + a_{12}\overline{a_{12}} + \cdots + a_{1n}\overline{a_{1n}} = |a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2$$

$$[A^*A]_{1,1} = a_{11}\overline{a_{11}} = |a_{11}|^2$$

A נורמלית, כלומר $AA^* = A^*A$, ובפרט שני האיברים לעיל שווים. אם כן, קיבלנו שבשורה הראשונה, הכל מתאפס חוץ מהאיבר הראשון, ז"א $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$.

נמשיך בדרך זו, והפעם נסתכל על האיבר במקום 2,2:

$$[AA^*]_{2,2} = a_{22}\overline{a_{22}} + a_{23}\overline{a_{23}} + \cdots + a_{2n}\overline{a_{2n}} = |a_{22}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2$$

$$[A^*A]_{2,2} = a_{22}\overline{a_{22}} = |a_{22}|^2$$

מנימוק דומה לנימוק שניתן קודם, $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$.

נמשיך ונקבל שכל האיברים של A מעל האלכסון הראשי הם אפסים, כדרוש.

□

הגענו למשפט הלכסון האוניטרי.

משפט 2. *יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אזי קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $A = [T]_B$ אלכסונית אם ורק אם הפולינום האופייני $p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, וכן T נורמלית.*

הוכחה. $\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים וש-T נורמלי. $p_T(x)$ מתפרק לחלוטין, ולכן T ניתן לשילוש אוניטרי, ז"א שקיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$A = [T]_B$ משולשת. המטריצה A משולשת, על פי הבנייה, וגם נורמלית (כי B אורתונורמלי), ולכן לפי הלמה הקודמת, A אלכסונית, כדרוש.

$\boxed{\Leftarrow}$ T ניתן ללכסון אוניטרי, אז הוא גם ניתן לשילוש אוניטרי, ולכן $p_T(x)$ מתפרק לחלוטין. אם כן, נותר להוכיח ש-T נורמלי.

מספיק להוכיח שאם B בסיס אורתונורמלי של V כך ש-$A = [T]_B$ אלכסונית, אזי A נורמלית. A אלכסונית, לכן $A^* = \overline{A}^t$ גם אלכסונית, ולכן $AA^* = A^*A$, כי מטריצות אלכסוניות מתחלפות זו עם זו.

□

משפט 3. *מטריצה A לכסינה אוניטרית (ז"א, קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש-$P^{-1}AP = P^tAP = D$ אלכסונית) אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים ו-A מטריצה נורמלית.*

הוכחה. נתבונן באופרטור $T=L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$, המוגדר על ידי $T(v)=Av$. T ניתן ללכסון אוניטרי אם ורק אם A ניתנת ללכסון אוניטרית (כי מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי אחר היא אוניטרית, והמטריצה המייצגת של T יחסית לבסיס הסטנדרטי היא A). לפי המשפט הקודם נקבל את מה שצריך להוכיח.

□

הערה 1. אלגוריתם ללכסון אוניטרי

1. נחפש בסיס B המורכב מווקטורים עצמיים של T.
2. נשתמש בתהליך גראם-שמידט לכל תת-מרחב עצמי V_λ בנפרד.

הערה 2. אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, התנאי על הפירוק של $p_T(x)$ מתקיים אוטומטית. לכן, T ניתן ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$ אם ורק אם T נורמלי. אותו הדבר נכון גם למטריצות.

משפט 4. *תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית (ז"א, $A=A^t$). אזי A לכסינה אורתוגונלית, ז"א שקיימת מטריצה אורתוגונלית ממשית $P\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-$P^{-1}AP=P^tAP=D$ מטריצה אלכסונית.*

הוכחה. ראשית, כל מטריצה סימטרית היא נורמלית.

$p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$: $p_A(x)=(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$. אבל A סימטרית ממשית, כלומר צמודה לעצמה, ולכן כל הערכים העצמיים שלה ממשיים. אם כן, הפירוק הנ"ל נכון גם מעל $\mathbb{R}$.

לכן, לפי משפט הלכסון האוניטרי מעל $\mathbb{F}$, המטריצה A לכסינה אורתוגונלית.

□

הערה 3. יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. נניח ש-$p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T נורמלי אם ורק אם T צמוד לעצמו.

בלי ההנחה על הפירוק של הפולינום האופייני, הטענה איננה נכונה; יש אופרטורים נורמליים שאינם צמודים לעצמם. ניתן דוגמה באמצעות מטריצות - עבור אופרטורים מגדירים את L_A, כפי שהגדרנו מספר פעמים בקורס.

עבור $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, A היא אנטי-סימטרית ($A^t=-A$).

A נורמלית, כי $AA^t=A(-A)=-A^2=(-A)A=A^tA$, אבל הפולינום האופייני איננו מתפרק לגורמים לינאריים; $p_A(x)=x^2+1$.

כמו כן, A איננה צמודה לעצמה, כדרוש.