1 שילוש אוניטרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. למדנו שאם הפולינום האופייני שלו מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, קיים לו בסיס, שעבורו המטריצה המייצגת היא משולשת (עליונה). כעת, נרצה לבנות בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$A = [T]_B$ משולשת.

נזכור כי תנאי הכרחי לשילוש באופן כללי הוא שהפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. נוכיח שתנאי זה מספיק לקיום בסיס אורתונורמלי כנ"ל.

משפט 1. *נניח ש-$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$A = [T]_V$ משולשת.*

הוכחה. קודם כל, לפי משפט השילוש, קיים בסיס B' של V כך ש-$A' = [T]_{B'}$ מטריצה משולשת עליונה. כעת, נשתמש בתהליך גראם-שמידט; נעבור מ-B' לבסיס אורתונורמלי B. נסמן $A = [T]_B$.

נסמן ב-C את מטריצת המעבר מ-B' ל-B. כפי שנאמר קודם, C מטריצה משולשת עליונה, ולכן C^{-1} אף היא משולשת עליונה, ולכן $A = C^{-1}A'C$ גם היא מטריצה משולשת עליונה, כדרוש.

□

הערה 1. בכיוון ההפוך המשפט מתקיים גם כן, כי פירוק של $p_T(x)$ למכפלה של גורמים לינאריים הוא תנאי הכרחי לשילוש.

משפט 2. *תהי A מטריצה ריבועית. נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה משולשת.*

לעיתים מנסחים את המשפט ש-P^*AP משולשת, אך זה אותו הדבר, כי עבור מטריצות אוניטריות $P^* = P^{-1}$.

הוכחה. נתבונן באופרטור $T = L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, המוגדר על ידי $T(v) = Av$, כאשר $v \in \mathbb{F}^n$. לכן, אם E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, $A = [T]_E$.

תהי $\langle\ ,\ \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$.

לפי המשפט הקודם, קיים בסיס אורתונורמלי B של $\mathbb{F}^n$ כך ש-$\tilde{A} = [T]_B$ משולשת. נסמן ב-P את מטריצת המעבר מ-E ל-B. אזי $\tilde{A} = P^{-1}AP$ מטריצה משולשת, ו-P אוניטרית כמטריצת מעבר מבסיס אורתונורמלי E לבסיס אורתונורמלי B.

□

הערה 2. מעל $\mathbb{R}$ מדברים על שילוש אורתוגונלי; המטריצה P היא אורתוגנולית (ז"א $P^{-1} = P^t$).

הערה 3. מעל $\mathbb{C}$, כל אופרטור וכל מטריצה ניתנים לשילוש אוניטרי, כי התנאי על הפירוק של $p_T(x)$ מתקיים אוטומטית (מעל המרוכבים, לכל פולינום יש פירוק למכפלה של גורמים לינאריים).

הערה 4. אלגוריתם לחיפוש מפורש של מטריצה משלשת אוניטרית P

1. משלשים את המטריצה הנתונה בעזרת מטריצה משלשת Q.
2. משתמשים בתהליך גראם-שמידט על Q, בעזרת מטריצה C.
3. מקבלים $P = CQ$.