1 סוגים מיוחדים של אופרטורים

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-T:

1. **נורמלי**, אם $TT^* = T^*T$ (כלומר, T ו-T^* מתחלפים).
2. **אוניטרי**, אם $TT^* = I$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ - אומרים ש-T **אורתוגונלי**).
3. **צמוד לעצמו**, אם $T^* = T$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ - אומרים ש-T **סימטרי**).

הערה 1. כל אופרטור אוניטרי הוא נורמלי, וגם כל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי.

השם "אוניטרי" (ו"אורתוגונלי" מוכר לנו (גם "סימטרי") מתורת המטריצות, ולא סתם; אכן יש קשר בין המושגים. המשפט הבא יבטא את הקשר הזה.

משפט 1. *אם $T : V \to V$ אופרטור מאחד הסוגים הנ"ל (נורמלי, אוניטרי או צמוד לעצמו), ואם B בסיס אורתונורמלי של V, אזי המטריצה המייצגת $A = [T]_B$ מקיימת את התכונה המתאימה, ז"א:*

1. *$AA^* = A^*A$ (A נקראת **נורמלית**).*
2. *$AA^* = I$ (A נקראת **אוניטרית**).*
3. *$A = A^*$ (A נקראת **צמודה לעצמה**).*

בכיוון ההפוך, אם A מטריצה המקיימת את אחת מהתכונות הנ"ל, אזי האופרטור הלינארי $T = L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ המוגדר על ידי הנוסחה $L_A(v) = Av$ מקיים את התכונה המתאימה.

הוכחה. המטריצה המייצגת של T^* יחסית לבסיס אורתונורמלי B היא $A^* = \overline{A}^t$, ומזה נובע הכל.

□

ננסה בעת למצוא קריטריונים לנורמליות ולאוניטריות של אופרטור.

משפט 2. *קריטריון לנורמליות*
אופרטור $T : V \to V$ הוא נורמלי אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-T נורמלי, אזי $TT^* = T^*T$.

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle$$

$$\|T^*(v)\|^2 = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \left\langle v, (T^*)^* T^*(v)\right\rangle = \langle v, TT^*(v)\rangle$$

נקבל שוויון $\|T^*(v)\|^2 = \|T(v)\|^2$, ולכן $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל $v \in V$, $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$.

נוכיח קודם שלכל $u, v \in V$, מתקיים $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle T^*(u), T^*(v)\rangle$. ניעזר בזהות הפולרית:

$$\langle T(u), T(v)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u)+T(v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T(u)+iT(v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right)=$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u+v)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T(u+iv)\|^2-\|T(u)\|^2-\|T(v)\|^2\right)$$

לפי אותם החישובים ל-T^*,

$$\langle T^*(u), T^*(v)\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|T^*(u+v)\|^2-\|T^*(u)\|^2-\|T^*(v)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T^*(u+iv)\|^2-\|T^*(u)\|^2-\|T^*(v)\|^2\right)$$

נקבל שלכל $u,v\in V$, מתקיים $\langle T^*(u), T^*(v)\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$. מצד שני, על פי הגדרת ההעתקה הצמודה, מתקיים

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*T(v)\rangle$$
$$\langle T^*(u), T^*(v)\rangle = \langle u, TT^*(v)\rangle$$

לכן $\langle u, T^*T(v)\rangle = \langle u, TT^*(v)\rangle$ לכל $u,v\in V$.

כלומר, לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u, T^*T(v)-TT^*(v)\rangle = 0$.

נבחר $u=T^*T(v)-TT^*(v)$. לפי האי-שליליות, נקבל $T^*T(v)-TT^*(v)=0$ לכל $v\in V$, כלומר $T^*T-TT^*=0$ אופרטור האפס, לכן $T^*T=TT^*$, כלומר T נורמלי.

□

משפט 3. *קריטריונים לאוניטריות*
התכונות הבאות של אופרטור T שקולות:

1. *T אוניטרי.*
2. *T שומר מכפלה פנימית, כלומר לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u,v\rangle$.*
3. *T שומר נורמה, כלומר לכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\| = \|v\|$.*
4. *T שומר מרחקים, כלומר לכל $u,v\in V$ מתקיים $\rho(T(u),T(v)) = \rho(u,v)$.*

הוכחה. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ נניח $T^*T=TT^*=I$, ונחשב לכל $u,v\in V$:

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*T(v)\rangle = \langle u, I(v)\rangle = \langle u,v\rangle$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ נניח שלכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*T(v)\rangle$, כלומר $\langle u, T^*T(v)-v\rangle = 0$. נבחר $u=T^*T(v)-v$, ונקבל שלכל $v\in V$, מתקיים $T^*T(v)-v=0$, ז"א $T^*T=I$, ולכן T אוניטרי.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ נניח $\|T(v)\| = \|v\|$ לכל $v\in V$. אזי לכל $u,v\in V$:

$$\rho(T(u),T(v)) = \|T(u)-T(v)\| = \|T(u-v)\| = \|u-v\| = \rho(u,v)$$

$\boxed{3 \Leftarrow 4}$ נניח שלכל $u, v \in V$ מתקיים $\rho\left(T\left(u\right), T\left(v\right)\right) = \rho\left(u, v\right)$. אזי לכל $v \in V$:

$$\left\|T\left(v\right)\right\| = \rho\left(T\left(v\right), 0\right) = \rho\left(v, 0\right) = \left\|v\right\|$$

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$ נניח $\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle = \left\langle u, v\right\rangle$ לכל $u, v \in V$, וניקח $u = v$. נקבל שלכל $v \in V$,

$$\left\|T\left(v\right)\right\| = \left\|v\right\| \Leftarrow \left\|T\left(v\right)\right\|^2 = \left\langle T\left(v\right), T\left(v\right)\right\rangle = \left\langle v, v\right\rangle = \left\|v\right\|^2$$

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ נניח $\left\|T\left(v\right)\right\| = \left\|v\right\|$ לכל $v \in V$. נתבונן ב-$\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle$:

$$\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|T\left(u\right) + T\left(v\right)\right\|^2 - \left\|T\left(u\right)\right\|^2 - \left\|T\left(v\right)\right\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\left\|T\left(u\right) + iT\left(v\right)\right\|^2 - \left\|T\left(u\right)\right\|^2 - \left\|T\left(v\right)\right\|^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left\|T\left(u + v\right)\right\|^2 - \left\|T\left(u\right)\right\|^2 - \left\|T\left(v\right)\right\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\left\|T\left(u + iv\right)\right\|^2 - \left\|T\left(u\right)\right\|^2 - \left\|T\left(v\right)\right\|^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left\|u + v\right\|^2 - \left\|u\right\|^2 - \left\|v\right\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\left\|u + iv\right\|^2 - \left\|u\right\|^2 - \left\|v\right\|^2\right) = \left\langle u, v\right\rangle$$

$\square$

הערה 2. תזכורת – זווית בין וקטורים
נזכיר כי עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אם $0 \neq u, v \in V$, אזי הזווית φ בין הווקטורים u, v היא המספר היחיד באינטרוול $[0, \pi]$ המקיים $\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

נראה כעת מה הקשר בין אופרטורים נורמליים ואוניטריים לזוויות.

משפט 4. *אם T נורמלי, ואם $u, v \in V$ שונים מאפס, אזי הזווית בין $T\left(u\right), T\left(v\right)$ שווה לזווית בין $T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)$.*

הוכחה. נשים לב כי אם T נורמלי, אזי $\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle = \left\langle u, T^*T\left(v\right)\right\rangle = \left\langle u, TT^*\left(v\right)\right\rangle = \left\langle T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)\right\rangle$, ולכן גם $\left\|T\left(u\right)\right\| = \left\|T^*\left(u\right)\right\|$ ו-$\left\|T\left(v\right)\right\| = \left\|T^*\left(v\right)\right\|$. אם כן,

$$\cos\sphericalangle\left(T\left(u\right), T\left(v\right)\right) = \frac{\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle}{\left\|T\left(u\right)\right\|\left\|T\left(v\right)\right\|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)\right) = \frac{\left\langle T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)\right\rangle}{\left\|T^*\left(u\right)\right\|\left\|T^*\left(v\right)\right\|}$$

ולכן הזוויות שוות.

$\square$

הערה 3. כל אופרטור אוניטרי T שומר זוויות, כלומר $\sphericalangle\left(T\left(u\right), T\left(v\right)\right) = \sphericalangle\left(u, v\right)$.

הוכחה.

$$\cos\sphericalangle\left(T\left(u\right), T\left(v\right)\right) = \frac{\left\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\right\rangle}{\left\|T\left(u\right)\right\|\left\|T\left(v\right)\right\|} = \frac{\left\langle u, v\right\rangle}{\left\|u\right\|\left\|v\right\|} = \cos\sphericalangle\left(u, v\right)$$

$\square$

נשאלת השאלה - לאחר המשפט הקודם, שבו הראינו שקילויות רבות לאופרטור אוניטרי, האם גם כאן אין שקילות? התשובה היא שאין. ניתן דוגמה.

דוגמה 1. ניקח $T(v) = 2v$. הוא שומר זוויות, אבל איננו אוניטרי; $TT^*(v) = 4v$.

הוכחנו קריטריון לנורמליות וקריטריון לאוניטריות, וכעת נסתכל על מטריצות.

משפט 5. *תהי A מטריצה ריבועית כלשהי, תהי $\langle\ ,\ \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$, ותהי A^* המטריצה הצמודה ל-A (ז"א $A^* = \overline{A}^t$). אזי:*

1. *לכל $u, v \in \mathbb{F}^n$, מתקיים $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$.*
2. *אם A נורמלית, אזי $\|Av\| = \|A^*v\|$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$.*
3. *אם A אוניטרית, אזי $\|Av\| = \|v\|$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$.*

הוכחה. נשתמש בעובדה שיחסית לבסיס אורתונורמלי, המטריצה המייצגת של $T^* : V \to V$ שווה ל-A^*, כש-A המטריצה המייצגת ל-T.

נסתכל על האופרטור $T = L_A(v) = Av$. המטריצה המייצגת שלו יחסית לבסיס הסטנדרטי היא A.

1. לכל $u, v \in \mathbb{F}^n$,

$$\langle Au, v\rangle = \langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, A^*v\rangle$$

2. אם A נורמלית, אזי גם T נורמלית, ז"א $T^*T = TT^*$, ולכן לכל $v \in \mathbb{F}^n$:

$$\|Av\|^2 = \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle =$$

$$= \langle v, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2 = \|A^*v\|^2$$

ולכן $\|Av\| = \|A^*v\|$.

3. אם A אוניטרית, אזי גם T אוניטרית, ז"א $T^*T = I$, ולכן לכל $v \in \mathbb{F}^n$:

$$\|Av\|^2 = \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle = \langle v, I(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

ולכן $\|Av\| = \|v\|$.

$\square$

הערה 4. אפשר להוכיח את המשפט הקודם מבלי להשתמש בתכונות של T.

1.1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות נורמליות ושל מטריצות צמודות לעצמן

נניח שיש לנו מטריצה נורמלית. ננסה לבדוק מהו הקשר בין הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים שלה לבין אלו של המטריצה הצמודה לה.

משפט 6. *אם A מטריצה נורמלית, λ ערך עצמי של A ו-v וקטור עצמי של A הקשור ל-λ, אזי v הוא גם וקטור עצמי של A^* הקשור ל-$\overline{\lambda}$.*

הוכחה. נתון כי A נורמלית. נוכיח כי $\lambda I - A$ גם היא נורמלית:

$$(\lambda I - A)(\lambda I - A)^* = (\lambda I - A)\left(\overline{\lambda} I - A^*\right) = \lambda\overline{\lambda} I - \overline{\lambda} A I - \lambda I A^* + A A^* = |\lambda|^2 - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + A A^*$$

$$(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = \left(\overline{\lambda} I - A^*\right)(\lambda I - A) = \overline{\lambda}\lambda I - \lambda A^* I - \overline{\lambda} I A + A^* A = |\lambda|^2 - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + A^* A$$

ויש שוויון בין שני הביטויים, כי A נורמלית.
אם כן, מתקיים:

$$Av = \lambda v \Rightarrow (\lambda I - A) v = 0 \Rightarrow \|(\lambda I - A) v\| = \|0\| = 0$$

אבל $\lambda I - A$ נורמלית, ולכן מתקיים:

$$\|(\lambda I - A) v\| = 0 \Rightarrow \left\|(\lambda I - A)^* v\right\| = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)^* v = 0 \Rightarrow \left(\overline{\lambda} I - A^*\right) v = 0 \Rightarrow A^* v = \overline{\lambda} v$$

□

לאור המשפט הקודם, נוכל להגיע למסקנה לגבי הקשר בין וקטורים עצמיים של מטריצה נורמלית הקשורים לערכים עצמיים שונים.
אם A מטריצה נורמלית, λ, μ ערכים עצמיים שונים של A, ו-u, v וקטורים עצמיים של A הקשורים ל-λ, μ בהתאמה, אזי $u \perp v$.

הוכחה.

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle \Rightarrow \langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \overline{\mu} v\rangle \Rightarrow \lambda \langle u, v\rangle = \mu \langle u, v\rangle \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

□

תהי A מטריצה צמודה לעצמה. אזי כל הערכים העצמיים של A ממשיים.

הוכחה. $A^* = A$, ולכן A נורמלית.
יהי λ ערך עצמי של A, ויהי v ו"ע של A הקשור ל-λ. אזי

$$\lambda v = Av = A^* v = \overline{\lambda} v$$

$v \neq 0$, ולכן $\lambda = \overline{\lambda}$, ומכאן $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

הערה 5. כל התכונות הקודמות מתקיימות לאופרטורים נורמליים או צמודים לעצמם, בהתאמה.