1 פונקציונלים לינאריים

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$. נתבונן ב-$\mathbb{F}$ בתור מרחב וקטורי מעל עצמו ($\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$, $\{1\}$ בסיס). אומרים שהעתקה לינארית $\varphi : V \to \mathbb{F}$ היא **פונקציונל לינארי על** V.

דוגמה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $a \in V$. נגדיר $\varphi_a : V \to \mathbb{F}$ כך:

$$\varphi_a(x) = \langle x, a \rangle$$

φ_a הוא פונקציונל לינארי, מפני שמתקיים:

$$\varphi_a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \langle \alpha x_1 + \beta x_2, a \rangle = \alpha \langle x_1, a \rangle + \beta \langle x_2, a \rangle = \alpha \varphi_a(x_1) + \beta \varphi_a(x_2)$$

משפט 1. *משפט ההצגה של ריס*
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי, ויהי $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי. אזי קיים וקטור $a \in V$ אחד ויחיד (התלוי ב-φ), שעבורו לכל $x \in V$,

$$\varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

הוכחה. **קיום** נבחר ב-$\mathbb{F}$ את הבסיס $\{1\}$. נבחר במרחב V בסיס אורתונורמלי B. נבנה מטריצה מייצגת של φ יחסית לבסיסים B, $\{1\}$. זו מטריצה מגודל $1 \times n$, ז"א שורה, נסמן אותה b.

יהי $x \in V$. אזי $\varphi(x) = b[x]_B = (b[x]_B)^t = [x]_B^t b^t$ (מותר לשחלף כי מדובר במטריצה 1×1, כלומר סקלר).

מצד שני, ידוע שמתקיים $\langle x, a \rangle = [x]_B^t G_B \overline{[a]_B} = [x]_B^t \overline{[a]_B}$ (ידוע $G_B = I$, כי B אורתונורמלי).

לכן, אם נבחר a המקיים $[a]_B = \overline{b}^t = b^*$, נקבל הדרוש.

יחידות אם יש a, a' כך שלכל $x \in V$ מתקיים $\varphi(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, a' \rangle$, אזי לכל x מתקיים $\langle x, a - a' \rangle = 0$. ניקח $x = a - a'$, ונקבל $\langle a - a', a - a' \rangle = 0$, ולפי האי-שליליות $a - a' = 0$, כלומר $a = a'$.

$\square$