1 המשמעות הגיאומטרית של דטרמיננטה

נחזור לתהליך גראם-שמידט, $v_i' = v_i - \pi(v_i)$, באשר π היא העתקה ההטלה על תת-המרחב הנפרש על ידי $\{v_1', \ldots, v_{i-1}'\}$.

נסמן ב-C את מטריצת המעבר מ-$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ל-

$$\{v_1', \ldots, v_n'\}$$

. לכן $C''-C = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, .C''

המעבר הבא - נרמול הבסיס $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ - מתואר על ידי המטריצה האלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1'\|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\|v_n'\|} \end{pmatrix}$$

לכן, מעבר מבסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ לבסיס אורתונורמלי מתואר על ידי המטריצה DC. תהי G_B מטריצת הגראם של הבסיס B, אזי, לפי משפט שהוכחנו:

$$I = (DC)^t G_B \overline{(DC)} = C^t D^t G_B \overline{D}\,\overline{C}$$

נפעיל דטרמיננטה, ונקבל:

$$\det I = \det\left(C^t D^t G_B \overline{D}\,\overline{C}\right)$$

$$1 = 1 \cdot \frac{1}{\|v_1'\| \cdots \|v_n'\|} \cdot \det G_B \cdot \frac{1}{\|v_1'\| \cdots \|v_n'\|} \cdot 1$$

$$\det G_B = \|v_1'\|^2 \cdots \|v_n'\|^2$$

$$\det G_B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

הגדרה 1. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, נניח $\dim V = n$, ותהי $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצת וקטורים. נגדיר **מקבילון** P על ידי

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

הגדרה 2. נניח ש-$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, ונגדיר את **נפח המקבילון הנוצר על ידם** להיות

$$\mathrm{vol}\,(P) = \sqrt{\det G_B}$$

משפט 1. *אם $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, נסמן P המקבילון הנוצר על ידי $\{v_1, \ldots, v_n\}$, S המקבילון הנוצר על ידי $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, ו-$h = v_n - \pi_{\mathsf{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}}(v_n)$. אזי*

$$\mathrm{vol}\,(P) = \mathrm{vol}\,(S) \cdot \|h\|$$

הוכחה. נסמן ב-A את מטריצת המעבר מהבסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ לבסיס $B'=\{v_1,\dots,v_{n-1},h\}$.
אזי A היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix}1 & & 0 & \star\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & \star\\ & & & 1\end{pmatrix}$$

מטריצת גראם יחסית לבסיס B' היא

$$G_{B'}=\begin{pmatrix}M_{nn}\left(G_B\right) & 0\\ 0 & \|h\|^2\end{pmatrix}$$

כאשר $M_nn\left(G_B\right)$ מסמן את המינור ה-n,n מ-G_B, כלומר G_B בלי השורה ה-n-ית ובלי העמודה ה-n-ית (הצורה כבה כי h מאונך לשאר הווקטורים). אם כן,

$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\sqrt{\det G_B}=\sqrt{\det\left(\overline{A}G_{B'}A^t\right)}=\sqrt{\det\overline{A}\det G_{B'}\det A^t}=\sqrt{\det G_{B'}}=$$

$$=\sqrt{\det M_{nn}\left(G_B\right)\|h\|^2}=\sqrt{\det M_{nn}\left(G_B\right)}\,\|h\|=\mathsf{vol}\left(S\right)\|h\|$$

□

משפט 2. *אם $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ואם $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס אורתונורמלי, נסמן ב-E את מטריצת המעבר ביניהם. אזי*

$$\mathsf{vol}\left(P_B\right)=\left|\det A\right|$$

הוכחה.

$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\sqrt{\det G_B}=\sqrt{\det\left(\overline{A}G_EA^t\right)}=\sqrt{\det\overline{A}\det I\det A^t}=$$

$$=\sqrt{\overline{\det A}\det A}=\sqrt{\left|\det A\right|^2}=\left|\det A\right|$$

□