1 פירוק ניצב

משפט 1. *משפט הפירוק הניצב*
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ממימד n. אזי לכל תת-מרחב $U \subseteq V$ מתקיים:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

הוכחה. נבחר ב-U בסיס אורתונורמלי $\{v_1, \ldots, v_k\}$, ונשלים אותו עד בסיס אורתונורמלי $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ של V. נתבונן ב-$\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, ונוכיח שזה בסיס של $U^{\perp}$.
יהי $w \in \text{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. $v_{k+1}, \ldots, v_n \in U^{\perp}$, ולכן $w \in U^{\perp}$.
בכיוון ההפוך, יהי $w \in U^{\perp}$. נרשום $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, ונכפול (במובן מכפלה פנימית) עם v_i עבור $i = 1, \ldots, k$.
אם כן, לכל $i = 1, \ldots, k$, מתקיים $0 = \langle w, v_i \rangle = \alpha_i$, ולכן $w \in \text{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.
מכאן נובע ש-$V = U + U^{\perp}$. נותר להוכיח $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. יהי $w \in U$, $w \in U^{\perp}$.
אזי $\langle w, w \rangle = 0$, ולכן $w = 0$.
בסך הכל, $V = U \oplus U^{\perp}$.

□

הערה 1. אם $\dim U = k$, $\dim V = n$, אזי $\dim U^{\perp} = n - k$.

הערה 2.

$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

הוכחה. נוכיח בשתי דרכים:

1. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} \oplus U^{\perp} = V$, וכן $U \oplus U^{\perp} = V$, ומכאן $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$, מיחידות המשלים האורתוגונלי.
2. על פי ההגדרה, $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$: ניקח $v \in U$, ולכן לכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $\langle w, v \rangle = 0$, ולכן $v \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

   כמו כן $\dim \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = n - (n - k) = k$, ולכן הם שווים.

□

כאשר הגדרנו הטלת וקטור על תת-מרחב, ההגדרה הייתה תלויה בבסיס. כעת, לאחר שהוכחנו את משפט הפירוק הניצב, נוכל להוכיח שאין תלות בבסיס.

הערה 3. תהי $\pi_B : V \to U$ העתקה ההטלה על תת-המרחב U, כאשר B בסיס אורתוגונלי של U. נתבונן בבסיס אורתוגונלי אחר, B', של U, ובהעתקת ההטלה המתאימה $\pi_{B'}$.
יהי $v \in V$. אזי הן $\pi_B(v)$ והן $\pi_{B'}(v)$ שייכים ל-U.
לפי הערה שהוכחנו, $v - \pi_B(v), v - \pi_{B'}(v) \in U^{\perp}$. מתקיים:

$$v = \underbrace{\pi_B(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - \pi_B(v))}_{\in U^{\perp}}$$

$$v = \underbrace{\pi_{B'}(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - \pi_{B'}(v))}_{\in U^{\perp}}$$

לכן, ממשפט הפירוק הניצב, נקבל $\pi_B(v) = \pi_{B'}(v)$.

ההיטל $\pi_B(v)$ של וקטור v על תת-המרחב U אינו תלוי בבחירה של הבסיס האורתוגונלי B של U.

הערה 4. אם $u \perp v$, אזי $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

הוכחה.

$$\|u \pm v\|^2 = \langle u \pm v, u \pm v \rangle = \langle u, u \rangle \pm \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} \pm \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

□

1.1 המשמעות הגיאומטרית של היטל

הערה 5. ההיטל של וקטור v על תת-מרחב U הא הווקטור ב-U הקרוב ביותר לווקטור v (מבחינת המרחק המושרה - $\rho(x,y) = \|x-y\|$).

ז"א, אם $v \in V$, $U \subseteq V$ ו-UV : π ההטלה, אזי לכל $u \in U$ מתקיים $\rho(v, \pi(v)) \leq \rho(v,u)$.

הוכחה.

$$\|v - \pi(v)\|^2 \leq \|v - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - u\|^2 = \|(v - \pi(v)) + (\pi(v) - u)\|^2 = \|v - u\|^2$$

ולכן $\rho(v, \pi(v)) \leq \rho(v,u)$.

□