1 קיום בסיס אורתונורמלי - תהליך גראם-שמידט

משפט 1. *לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתונורמלי.*

הוכחה. יהי $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V. נקבל מבסיס זה בסיס אורתוגונלי $\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_n\right\}$.
נציג את **תהליך גראם-שמידט**, שבסופו יתקבל הבסיס הרצוי:

1. נגדיר $\mathring{v}_1 = v_1$.
2. לכל $k > 1$, נגדיר $\mathring{v}_k = v_k - \pi_{\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k)$ (**נוסחת גראם-שמידט**).
3. כשנקבל בסיס אורתוגונלי $\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_n\right\}$, נשתמש בנרמול, ונקבל בסיס אורתונורמלי.

□

הערה 1. 1. בכל שלב אנו מקבלים וקטור $\mathring{v}_k$, שהוא ניצב למרחב $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$:

$$v_k = \mathring{v}_k + \pi_{\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_{k-1}\right\}}(v_k) \in \text{Span}\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_k\right\},$$

לכן $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \text{Span}\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_k\right\}$,

ומכאן $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{Span}\left\{\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_k\right\}$.

2. יש גרסה של תהליך גראם-שמידט עם נרמול בכל צעד. זה לא ישנה את האלגוריתם, כי הנוסחה להיטל אינה תלויה בכפל של וקטור בסיס בסקלר.

כל קבוצה אורתונורמלית ניתנת להשלמה עד בסיס אורתונורמלי.

הוכחה. תהי $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית. היא בת"ל, ולכן $k \leq n$.
אם $k = n$, אזי S היא בסיס אורתונורמלי, ואין מה להוכיח.
אם $k < n$, נשלים את S עד לבסיס B של V, ונשתמש בתהליך גראם-שמידט.

□

הערה 2. בהוכחה הקודמת, תהליך גראם-שמידט איננו משפיע על k הווקטורים הראשונים (בלומר, על הווקטורים של S).