1 המרחב הניצב

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\emptyset \neq S \subseteq V$ קבוצה כלשהי. נגדיר $S^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in S : \langle v, u \rangle = 0\}$. $S^\perp$ נקרא **המרחב הניצב ל-**S.

זוהי בעצם קבוצת כל הווקטורים המאונכים לכל S.

הערה 1. $S^\perp$ תת-מרחב של V.

הוכחה. אם $v_1, v_2 \in S^\perp$ ואם $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, ואם $u \in S$, אזי:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u \rangle = \alpha_1 \langle v_1, u \rangle + \alpha_2 \langle v_2, u \rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

□

הערה 2. $S^\perp = (\mathrm{Span}\,(S))^\perp$.

הוכחה. אם $v \in (\mathrm{Span}\,(S))^\perp$, אזי $\langle v, u \rangle = 0$ לכל $u \in \mathrm{Span}\,(S)$, בולל $u \in S$, ולכן $v \in S^\perp$. אם $v \in S^\perp$, אזי $\langle v, u \rangle = 0$ לכל $u \in S$. יהי $u \in \mathrm{Span}\,(S)$, ז"א שמתקיים $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$, באשר $u_i \in S$. לכן,

$$\langle v, u \rangle = \langle v, \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \rangle = \overline{\alpha}_1 \langle v, u_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha}_m \langle v, u_m \rangle = \overline{\alpha}_1 \cdot 0 + \cdots + \overline{\alpha}_m \cdot 0 = 0$$

□