משפט 1 (תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה). *הגבול* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *קיים אם ורק אם*

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall_{x',x''}:(0<|x'-a|,|x''-a|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon)$$

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$
יהי אפסילון גדול מ-0, אזי

$$\exists\delta>0\forall x:|x-a|<\delta\Leftarrow|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח את אותו דלתא ונראה כי אם $|x'-a|,|x''-a|<\delta$ אז

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-a+a-f(x'')|\leq|f(x')-a|+|a-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\boxed{\Rightarrow}$
נבדוק שקיים גבול לפי היינה. תהי $x_n\to a$ כך ש- $x_n\neq a$, ונוכיח ש- $f(x_n)$ סדרת קושי. יהי אפסילון גדול מ-0 אז

$$\exists\delta\forall x',x'':0<|x'-a|,|x''-a|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

אבל משום ש- $x_n\to a$ אז קיים N כך ש- $\forall n>N:|x_n-a|<\delta$ ולכן בפרט

$$\exists_N\forall n>m>N:|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$$

מכאן שזו סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול L .
אבל עדיין יש להראות ש-$f(x_n)$ תתכנס תמיד לאותו מספר גם אם ניקח סדרות שונות.
נניח $y_n\to a, y_n\neq a, f(y_n)\to l$ ונוכיח ש- $l=L$.
נניח בשלילה ש- $l\neq L$, אזי אם ניקח $\varepsilon=\frac{|L-l|}{3}$ נראה שנגיע לסתירה עם הנתון, משום שמהגדרת הגבול קיים איבר שממנו והלאה $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ ו- $|f(y_n)-l|<\varepsilon$ ואז לא יכול להיות ש- $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$ ומכאן הסתירה $\square$