

יהיו 2 טורים $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $(B) \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. נגדיר את הטור $(C) \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ כאשר $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

משפט 1. נניח שהטורים A, B מתכנסים בהחלט אזי גם C מתכנס בהחלט ו- $C = A \cdot B$

הוכחה. קודם נראה ש- C מתכנס בהחלט

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m |c_n| &= \sum_{n=0}^m \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}| \leq \\ &\sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^m |a_n| |b_k| = \sum_{n=0}^m |a_n| \cdot \sum_{k=0}^m |b_k| = A' \cdot B' \end{aligned}$$

כאשר A', B' זה טור הערכים המוחלטים של A, B וידוע שהם קיימים וסופיים משום שהטורים מתכנסים בהחלט. לכן קיים חסם מעיל לסדרת הסכומים החלקיים של $C' = \sum |c_n|$ ואז הטור מתכנס בהחלט. נסמן את הס"ח של A ב- A_n ואת הס"ח של B ב- B_n . מתקיים ש-

$$A_n B_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = C_n + \sum_{n < i+j \leq 2n} a_i b_j$$

נגדיר $S_n = \sum_{i+j \leq n} |a_i| |b_j|$ ונראה שזוהי סדרה מונוטונית עולה. מתקיים ש- C מתכנס בהחלט ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} |a_i b_j| < \infty$$

ולכן S_n חסומה ואז מתכנסת לגבול S .

$$|A_n B_n - C_n| = S_{2n} - S_n \rightarrow S - S = 0$$

□

ומאירתמטיקה של גבולות $A \cdot B = C$