

אנחנו רגילים מחיי היום יום שחוק הקיבוץ עובד לחיבור: $(a+b)+c = a+(b+c)$. האם זה ככה בטורים? נסתכל על

$$1-1+1-1+1-1+\dots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0$$

אפשר גם להגיד ש-

$$1-1+1-1+1-1+\dots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots = 1-0-0-0-\dots = 1$$

לסיכום, אי אפשר באופן כללי, אבל מתי כן?

משפט 1. אם טור מתכנס, אפשר להשתמש בחוק הקיבוץ. יותר פורמלית, אם נגדיר סדרה מונוטונית עולה של טבעיים אז הטור $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{p=n_{k-1}+1}^{n_k} a_p)$ מתכנס לאותו מספר כמו הטור המקורי.

הוכחה. לשם ההוכחה נסמן את הס"ח של הטור המקורי בתור A_n והס"ח של הטור "החדש" בתור \tilde{A}_n . סדרת הסכומים החלקיים במקרה הזה תהיה פשוט

$$\tilde{A}_m = \sum_{p=1}^{n_m} a_p = A_{n_m}$$

וביזון ש- $A_{n_m} \rightarrow S$ בתור תת סדרה של A_n שמתכנסת אז גם $A_m \rightarrow S$. □

תרגיל בית: יהי הטור $\sum a_n$ ונתון ש- $a_n \rightarrow 0$ וגם ש- $\exists C : \forall k : |n_{k+1} - n_k| < C$ אז אם הס"ח \tilde{A}_n מתכנסת אז גם A_n מתכנסת. בעצם התרגיל הוא על טור שאיבריו שואפים ל-0 והקיבוץ לא "רחב כרצוננו" אז אם הטור החדש מתכנס גם הטור המקורי.