

**משפט 1.** נתון טור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n \frac{1}{a_n} = \alpha$$

(אם הטור הזה מועמד להתכנסות אז האיבר הכללי שואף ל-0 ולכן אפשר לראות שבכל מקרה  $\alpha$  חייב להיות חיובי במקרה זה).

1. אם  $\alpha > 1$  (גם אינסופי זה בסדר) הטור מתכנס

2. אם  $\alpha < 1$  הטור מתבדר

הוכחה. 1.  $\exists n_0 \forall n > n_0 : \log_n \frac{1}{a_n} > \alpha'$  עבור  $1 < \alpha' < \alpha$ . קיבלנו  $\frac{1}{a_n} > n^{\alpha'}$  ואז כמובן  $\frac{1}{n^{\alpha'}} > a_n$  והטור  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha'}}$  מתכנס (הוכחנו כשדיברנו על מבחן העיבוי) ולכן, ממבחן השוואה הראשון, הטור שלנו מתכנס

2. ההוכחה אנלוגית ממש רק שניקח  $\alpha < \alpha' < 1$  ונקבל טור שהוכחנו שהוא מתבדר כשדיברנו על מבחן העיבוי.

□

**דוגמה 1.** האם הטור הבא מתכנס או מתבדר?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$$

פתרון: נראה כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^{\ln(\ln(n))}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln(n)) = \infty$  ולכן ממבחן לוגריתמי הטור מתכנס