משפט 1. *נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כך ש- $\forall n: 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ (כלומר a_n מונוטונית יורדת). אזי הטור הזה והטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k} \cdot 2^k$ חברים.*

דוגמה 1. הטור ההרמוני הוא טור שאיבריו מהווים סדרה מונוטונית יורדת, ולכן חבר של הטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

וברור שהטור הזה מתבדר. האמת שאפשר עם מבחן העיבוי להגיע לתוצאה יותר כללית עכשיו:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^p} \cdot 2^k$ מתכנס, אבל האיבר הכללי של הטור הוא בעצם $(2^{1-p})^k$, כלומר סדרה הנדסית.
טור הנדסי מתכנס אם ורק אם היחס בין איבריו הוא בין -1 ל- 1 , ומכאן שצריך להתקיים $2^{1-p} < 1 = 2^0$. זה קורה אם ורק אם $1 - p < 0$ וזה קורה אם ורק אם $p > 1$

הוכחה. לשם הפשטות נקרא לסס"ח של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בשם A_n ולסס"ח של $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n} \cdot 2^n$ בשם S_n. כעת, מצד אחד:

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) \geq$$

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = A_{2^n-1}$$

(השתמשנו בעובדה שהסדרה מונו' יורדת)
ומצד שני

$$S_n = a_1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2^k} \cdot 2^{k-1} = a_1 + 2[a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots] \leq$$

$$a_1 + 2[a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots] = 2A_{2^n} - a_1$$

(גם פה השתמשנו בעובדה שהסדרה מונו' יורדת)
לסיכום: $A_{2^n-1} \leq S_n \leq 2A_{2^n} - a_1$
אם A_n סדרה מתכנסת ל- C אז נקבל (מכך שהסדרה A_n מונוטונית עולה) ש- $S_n \leq 2C - a_1$, כלומר חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת. מאי השיוויון שקיבלנו אפשר לקבל את הכיוון בשני של הטענה באופן דומה. □

הערה 1. אם הסדרה לא מונו' יורדת, המשפט לא יתקיים. דוגמה די מאולצת היא הסדרה

$$x_n = 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, 0, \frac{1}{9}, \cdots$$

במקרה הזה $S_n = 0$ ולכן ברור שהטור "המתאים" שלה מתכנס, אבל הטור לא מתכנס. כי אם נגדיר

$$y_n = 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, \cdots$$

אז $\sum y_n$ הוא בעצם טור הנדסי (מלבד הרבה אפסים שדחפנו "באמצע") ולכן מתכנס. כעת נראה ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

ואז אם $\sum x_n$ מתכנס גם הטור ההרמוני יתכנס ופה הסתירה.