משפט 1. *יהיו הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ונניח ש- $\forall n : a_n, b_n \geq 0$ אזי*

1. *אם $a_n = O(b_n)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*
2. *אם $a_n = O^*(b_n)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*

הערה 1. מההגדרות של סימני לנדאו מתקיים ש-

$$a_n = O^*(b_n) \Leftrightarrow b_n = O^*(a_n)$$

ומכל אחד מהם נובע ש-

$$a_n = O(b_n), b_n = O(a_n)$$

מכאן שאם משפט 1 נכון ו- $a_n = O^*(b_n)$ אז משפט 2 מתקבל ישירות

הוכחה.

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : a_n \leq M \cdot b_n$$

וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ולכן

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} M \cdot b_n = M \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

והטור האחרון מתכנס, ומזה מסיקים ש- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ חסום מלעיל ולכן מתכנס. בעת רק נשאר לראות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ וזה בידוע, מתכנס. □

מסקנה 2 (מבחן ההשוואה הגבולי בצורתו המוכרת יותר)**.** *יהיו הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ונניח ש- $\forall n : a_n, b_n \geq 0$ וגם הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ קיים. אזי*

1. *אם $L = 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*
2. *אם $L \neq 0$ הטורים "חברים", כלומר אחד מתכנס אם ורק אם השני מתכנס*

הוכחה. 1. אם $L = 0$ אז

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 1$$

ומכאן ש- $a_n = O(b_n), n \to \infty$. כל מה שנשאר זה להשתמש במשפט הקודם וסיימנו.

2. אם $L \neq 0$ אז

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 2L$$

ולכן מהעברת אגפים $a_n = O(b_n)$. מצד שני ביוון ש- $L \neq 0$ אז אפשר לעשות את אותו טריק על $\frac{b_n}{a_n}$ והגבול $\frac{1}{L}$ ולקבל ש- $b_n = O(a_n)$. עבשיו שוב אפשר להפעיל את המשפט הקודם ולקבל את הדרוש.

□

דוגמה 1. נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$ עבור $0 \neq a, b$ קבועים. נראה ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{an+b}} = a$$

ולכן, ממבחן ההשוואה הגבולי, הטור הזה "חבר" של הטור ההרמוני שמתבדר, ומכאן שהטור מתבדר.