

משפט 1. יהיו שני טורים עם איברים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ כך ש- $\exists n_0 \forall n > n_0 a_n \leq b_n$ אזי

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר

הערה 1. משפט 2 שקול לוגית למשפט 1 משום שמתקיים

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

לכן מספיק להוכיח רק את 1

הערה 2. אפשר "לזרוק" את כל האיברים שבאים לפני n_0 ואז אם $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ מתכנס, בוודאי גם

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

לכן בהוכחה נניח ש- $n_0 = 1$

הוכחה. נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אזי סדרת הסכומים החלקיים B_n חסומה (נקרא לחסם מלעיל שלה M). בעת נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n \leq M$$

ולכן A_n חסומה ומכאן ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. \square

דוגמה 1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר או מתכנס? נראה כי $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \leq n$ וכיוון שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר אז לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור שלנו מתבדר.