1.0 הגדרה

נגדיר את $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

משפט 1. *קיים הגבול* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *, לגבול הזה קוראים* e.

הוכחה. נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.
עולה מונוטונית:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$$

$$\frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = (1-\frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1}$$

לפי אי שיוויון ברנולי, זה גדול או שווה לביטוי הבא:

$$(1+n(-\frac{1}{n^2}))\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$$

מכאן שזוהי סדרה מונוטונית עולה.
<u>חסומה מלעיל:</u>
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$
ואם נפתח את הביטוי לפי הבינום של ניוטון נקבל

$$x_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

איבר טיפוסי בסכום הזה הוא מהצורה

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} \le \frac{n^n}{n^{n-k}k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

ולכן

$$x_n \le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

כל מה שאחרי ה-2 זה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה 1 ולכן נקבל ש- $x_n \le 3$
אז זוהי סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

$\square$

2.0 תבונות של e

משפט 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$

הוכחה. נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. צריך להראות ש- $e_n \to e$. אם נשתמש באותה סדרה x_n שהגדרנו אז ראינו בהוכחה של המשפט הקודם ש- $x_n \le e_n$. מצד שני אם נכתוב את x_n בצורה מפורשת אפשר גם לראות ש-

$$x_n = 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

ולכן אם נקבע k ספציפי וניקח $n > k$ נקבל ש-

$$x_n \geq 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

ואם נשאיף את $n \to \infty$ אז נקבל בצד ימין בדיוק את e_k ובצד שמאל את e. גבול שומר על אי שיוויון חלש ולכן נקבל

$$x_n \leq e_n \leq e$$

ולפי משפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש.

$\square$

נשים לב שאם נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ אז אם $N > n$ מתקיים

$$e_N - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \frac{1}{N!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{\frac{1}{n+2}\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{N-n} - 1\right)}{\frac{1}{n+2} - 1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1}$$

כעת נשתמש בזה בשביל להוכיח:

משפט 3. $e \notin \mathbb{Q}$

הוכחה. נניח $e = \frac{p}{q} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ וע"י כפל של 2 האגפים נקבל

$$(n+1)!\frac{p}{q} = (n+1)!(1 + \cdots + \frac{1}{n!}) + (n+1)!\alpha_n$$

וזה נכון לכל n, בפרט ל- $n > q$. במקרה זה, אגף שמאל שלם ואגף ימין מורכב ממשהו שהוא שלם ועוד $(n+1)!\alpha_n$ אבל החלק האחרון הזה הוא לא שלם משום שקטן מ- $\frac{1}{n+1}$.
אגף שמאל, שהוא שלם הוא סכום של משהו שלם ומשהו שהוא לא שלם. סתירה $\square$