תהי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאיבריה נראים ככה: $x_1, x_2, x_3, \cdots$ ונניח ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. נסתכל על הסדרה x_{n+1} שאיבריה הם $x_2, x_3, x_4, \cdots$, ונראה ש- $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ גם כן. זאת משום שעבור $\epsilon > 0$ ידוע ש- $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} : |x_n - L| < \epsilon$ וכיוון שזה לכל $n > n_0$ אז במצב כזה גם $n+1$ (שהוא גדול מ- n שגדול מ- n_0) מקיים את הטענה ש- $|x_{n+1} - L| < \epsilon$.

העקרון הזה הוא ליבו של טריק נחמד שעוזר לחשב במקרים רבים גבולות של סדרות הנתונות בצורה רקורסיבית. השיטה היא כזאת: אם נתון ש- $x_{n+1} = f(x_n)$ אז גם $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ אבל $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ ובאגף ימין אפשר גם להשתמש באריתמטיקה של גבולות כדי להציב L במקומות המתאימים, וכך מגיעים למשוואה. צריך לשים לב שכל זה בא בהנחה שהסדרה x_n מתכנסת, ואת זה יש להוכיח!

דוגמה 1. מהו הגבול של הסדרה $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots$?

פתרון: נניח שהסדרה מתכנסת, ולכן $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x}$. מכאן

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + x_n$$

נציב $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ואז

$$L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - L - 2 = (L-2)(L+1) = 0$$

$$L = -1, 2$$

מצאנו שבמקרה שהסדרה מתכנסת, יש רק מועמד אחד שיכול להיות הגבול (-1 נפסל משום שכל איברי הסדרה חיוביים ולכן לא יכולים להתכנס למספר שלילי). אם נצליח להוכיח שהסדרה מתכנסת, הגבול שלה הוא 2. נוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה ע"י 2:

מונוטונית עולה -

$$x_n \le x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \le \sqrt{x_n + 2} \Leftrightarrow x_n^2 \le x_n + 2 \Leftrightarrow -1 \le x_n \le 2$$

כלומר הסדרה לא תרד כל עוד האיברים בין -1 ל-2. כל איברי הסדרה חיוביים ועכשיו נוכיח שכל איברי הסדרה לא גדולים מ-2 באמצעות אינדוקציה:

$$x_1 = \sqrt{2} < 2, x_n \le 2 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \le \sqrt{2+2} = 2$$

אז כל איברי הסדרה קטנים מ-2 ולכן הסדרה מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת ל-2. (את הגבול חישבנו באמצעות מעבר הגבול)