משפט 1. *נניח* $x_n \to L$ *אזי*

1. *לכל* $p < L$ *קיים* n_1 *כך ש-* $n > n_1 \Rightarrow x_n > p$
2. *לכל* $q > L$ *קיים* n_2 *כך ש-* $n > n_2 \Rightarrow x_n < q$

הוכחה. אם נציב בהגדרת הגבול של $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ את $\varepsilon = L - p$ נוכיח ישירות את 1 ואם נציב $\varepsilon = q - L$ נוכיח ישירות את 2.

□

מסקנה 2. *אם* $x_n \to a, y_n \to b$ *כש-* $a < b$ *אז* $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} x_n < y_n$

הוכחה. אם ניקח $p = \frac{a+b}{2}$ שהוא בין a ל-b אז לפי המשפט הקודם מתקיים:

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1} : x_n < p, \exists_{n_2}\forall_{n>n_2} : y_n > p$$

ואז עבור $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $x_n < p < y_n$. □

מסקנה 3 (גבול שומר על אי שיוויון חלש)**.** *כלומר אם* $x_n \le y_n$ *ו-* $x_n \to a, y_n \to b$ *אז* $a \le b$

הוכחה. נניח בשלילה ש- $b < a$ אזי מהמסקנה הקודמת $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} y_n < x_n$ בסתירה לנתון. □

הערה 1 (גבול לא שומר על אי שיוויון חזק). אם ניקח את $y_n = \frac{1}{n}$ ו- $x_n = 0$ אזי $x_n < y_n$ אבל שתי הסדרות מתכנסות **ולא נכון** להגיד ש- $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$

מסקנה 4 (גבול סדרה הוא יחיד)**.** *כלומר אם* $x_n \to L_1, x_n \to L_2$ *אזי* $L_1 = L_2$

הוכחה. $x_n \le x_n$ ולכן, מהמסקנה הקודמת, $L_1 \le L_2$ ובאותה דרך $L_2 \le L_1$. מכאן ש- $L_1 = L_2$ □