1.0 פעולות עם גבולות אינסופיים

משפט 1. *1. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \pm\infty$ (בהתאם לגבול של x_n)*

2. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \text{sign}(a) \cdot \pm\infty$ כאשר הסימן של a מוגדר להיות 1 אם הוא חיובי, -1 אם הוא שלילי ו-0 אם הוא 0.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
גם הצד השני נכון, נסו להוכיח את זה לפי המשפטונים הבאים:

3.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n > 0 \Rightarrow x_n \to \infty$

3.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n < 0 \Rightarrow x_n \to -\infty$

הוכחה. 1. יהי $M > 0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1} \forall_{n>n_1} : a - 1 < y_n < a + 1$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2} \forall_{n>n_2} : x_n > M - a + 1$$

ולכן אם נגדיר $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0} : x_n + y_n > (M - a + 1) + (a - 1) = M$$

2. נוכיח עבור a חיובי, עבור a שלילי ההוכחה דומה מאוד והדבר היחיד במעט שמשתנה זה סימני אי השיוויון:

יהי $M > 0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1} \forall_{n>n_1} : \frac{a}{2} < y_n < \frac{3a}{2}$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2} \forall_{n>n_2} : x_n > \frac{2}{a} M$$

ולכן אם נגדיר $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0} : x_n \cdot y_n > \frac{2}{a} M \cdot \frac{a}{2} = M$$

3. יהי $\epsilon > 0$. מהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : x_n > \frac{1}{\epsilon}$$

אבל

$$\frac{1}{\epsilon} < |x_n| \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \epsilon$$

וקיבלנו את הדרוש כי

$$\forall_{n>n_0} : |\frac{1}{x_n}| < \epsilon$$

3.1. נוכיח את 3.1 ו- 3.2 מוכח באופן דומה: יהי $M > 0$ אז $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M}$ ומכאן ש- $\forall_{n>n_0}x_n > M$.

□

2.0 מקרים של כל מקרה לגופו - אי הגדרה:

יהיו x_n, y_n

1. אם $x_n \to \infty, y_n \to -\infty$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n + y_n$ (במילים אחרות, לא מוגדר $(-\infty) + \infty$)

דוגמה 1.

$$x_n = n, y_n = 1 - n \Rightarrow x_n + y_n = 1 \to 1$$
$$x_n = n^2, y_n = 2 - n^2 \Rightarrow x_n + y_n = 2 \to 2$$
$$x_n = n^2, y_n = -n \Rightarrow x_n + y_n = n^2 - n = n(n-1) \to \infty$$
$$x_n = n, y_n = -n^2 \Rightarrow x_n + y_n = -n^2 + n = -n(n-1) \to -\infty$$
$$x_n = n, y_n = (-1)^n - n \Rightarrow x_n + y_n = (-1)^n \Rightarrow \text{ Limit doesn'texist}$$

2. אם $x_n \to \infty, y_n \to 0$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n \cdot y_n$

דוגמה 2.

$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n y_n = 1 \to 1$$
$$x_n = n^2, y_n = \frac{2}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = 2 \to 2$$
$$x_n = n^2, y_n = \frac{-1}{n} \Rightarrow x_n y_n = -n \to -\infty$$
$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0$$
$$x_n = n, y_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow x_n y_n = (-1)^n \Rightarrow \text{ Limit doesn'texist}$$

3. אם שתי הסדרות שואפות ל-0 אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $\frac{x_n}{y_n}$

דוגמה 3. אם ניקח כל זוג מהדוגמאות של מקרה 2 ונחליף את x_n בהופכי שלו, נקבל דוגמאות ל-3 (חשבו מה קורה במקרה זה ל- $\frac{y_n}{x_n}$)

תרגיל: מהו $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$?

פתרון: נשתמש בשיטה שנקראת "כפל בצמוד" והיא נקראת כך מהדמיון לרעיון של חילוק מספרים מרוכבים (לא חלק מהחומר של הקורס)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$