יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

משפט 1. *אם* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \exists M : |b_n| < M$ *אז* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ *(מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 זו סדרה ששואפת ל-0)*

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש- a_n שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N כך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\varepsilon}{M}$. מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ-0 הוא

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \varepsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N, לכל $n > N$ יתקיים ש- $|a_n b_n| < \varepsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל-0. □

דוגמה 1. $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובבת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$ (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \leq 1$) וסדרה ששואפת ל-0, $\frac{1}{n}$.

משפט 2. $a_n \to L \Leftrightarrow a_n - L \to 0$.

משפט 3. *אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.*

הוכחה. בדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש-

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n + b_n - 0| < \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש.

□

משפט 4 (אריתמטיקה של גבולות)**.** *נניח ש-* $a_n \to a, b_n \to b$ *(כאשר* $a, b \in \mathbb{R}$ *) אזי:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3. *אם c קבוע אז* $c \cdot a_n \to ca$

4. *אם $a > 0$ אז* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

הוכחה. 1. נסמן $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$ ועפ"י משפט, הם שואפים ל-0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל-0:

$$x_n + y_n = a_n - a + b_n - b = (a_n + b_n) - (a + b) \to 0$$

לפי משפט, זה אומר ש- $a_n + b_n \to a + b$

2. אם נסתכל על אותם x_n, y_n אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל-0.

$$a_n b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n y_n + a \cdot y_n + b \cdot x_n + ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל-0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל-0 כפול מספר קבוע (שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה) ולכן שואפות ל-0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל- ab. סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו (סכום גבולות), $a_n b_n \to ab$

3. נגדיר $\forall n : c_n = c$ ונראה ש- $c_n \to c$, ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4. יהי אפסילון גדול מ-0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:
$\exists N_0 \forall n > N_0 : ||a_n| - |a|| < |a|$ (לקחנו את הערך המוחלט של a להיות האפסילון).
לכן עבור $n > N_0$ מתקיים ש- $|a| < 2|a_n|$

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - a_n}{a_n a}| = \frac{|a - a_n|}{|a_n||a|} \leq |a - a_n| \frac{2}{|a_n||a|}$$

עפ"י הגדרת הגבול

$$\exists N \forall n > N : |a_n - a| \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4}$$

מכאן שלכל $n > N$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| \leq |a_n - a| \frac{2}{|a_n||a|} \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4} \frac{2}{|a_n||a|} = \epsilon \frac{|a|}{2|a_n|} < \epsilon \frac{2|a_n|}{2|a_n|} = \epsilon$$

□

דוגמה 2. נמצא את גבול הסדרה $a_n = \frac{n^2+5n+6}{3n^2-2}$:

$$a_n = \frac{n^2 + 5n + 6}{3n^2 - 2} = \frac{\frac{n^2+5n+6}{n^2}}{\frac{3n^2-2}{n^2}} = \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{3 - \frac{2}{n^2}}$$

אבל $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$ ומהסעיף השלישי והראשון במשפט הקודם מסיקים ש-$\frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}, \frac{2}{n^2} \to 0$ ואחרי שנחבר את הקבועים נקבל שהמונה שואף ל-1 והמכנה ל-3 ומהסעיף הרביעי נקבל ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$

הערה 1.

1. אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת אזי a_n+b_n מתבדרת
2. אם a_n, b_n מתבדרות אזי a_n+b_n עשויה להתבדר או להתכנס (אי אפשר לדעת באופן כללי, זה תלוי בסדרות עצמן)
3. אם $a_n \to L \neq 0$ ו- b_n מתבדרת אזי a_nb_n מתבדרת
4. אם $a_n \to 0$ ו- b_n מתבדרת אזי a_nb_n עשויה להתבדר או להתכנס.
5. אם a_n, b_n מתבדרות אזי a_nb_n עשויה להתבדר או להתכנס

הסבר:

1. נניח בשלילה ש- $c_n = a_n+b_n$ מתכנסת אז נראה כי $b_n = c_n - a_n$ מתכנסת כהפרש של מתכנסות.
2. אפשר להגדיר $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = -n$ ולראות ש- $a_n + c_n = 0 \to 0$ ולעומת זאת $b_n + c_n = n(n-1)$ וזה מתבדר.
3. הוכחה בשיעורי הבית
4. הוכחה בשיעורי הבית
5. נגדיר $a_n = (-1)^n$ ואז $a_n \cdot a_n = 1 \to 1$ למרות ש-2 הגורמים מתבדרים. מצד שני אם מגדירים $b_n = n$ נקבל ש- $a_nb_n = (-1)^n \cdot n$ שזה לא חסום ולכן מתבדר.

<u>תרגיל בית:</u> נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a, b תמיד מתקיים $||a|-|b|| \leq |a-b|$ בדי להוכיח שאם $a_n \to L$ אז $|a_n| \to |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.