## 1.0 הגדרת סדרה

**הגדרה 1.** סדרה היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, כלומר התאמה בין המספרים הטבעיים למספרים הממשיים. לכל מספר טבעי מתאימים מספר ממשי. דוגמה לכך תהיה פונקציה שמתאימה את 1 ל-1, את 2 ל-$\frac{1}{2}$, את 3 ל- $\frac{1}{3}$ ובאופן כללי את $n$ ל- $\frac{1}{n}$ (נהוג לסמן $a_n$ במקום $f(n)$ בהקשר של סדרות ולכן פה $a_n=\frac{1}{n}$ ). כשאנחנו מתאימים את המספר הטבעי $n$ למספר ממשי $a_n$, זה אומר אינטואיטיבית ש- $a_n$ זה האיבר במקום ה- $n$. כך לדוגמה את הפונקציה שהתאימה את $n$ ל- $\frac{1}{n}$ ניתן לראות בעצם כמה שאנחנו מכירים כסדרה:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

סימון מקובל לסדרות הוא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. גם סדרת מספרים אקראית היא סדרה, לא חייבת להיות חוקיות ברורה!

## 2.0 הגדרת הגבול

מתי נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר $L$?
באופן אינטואיטיבי הכוונה ברורה, הסדרה $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ בבירור שואפת ל-0, הסדרה $0,1,0,1,0,1,0,\cdots$ לא מתכנסת לכלום והסדרה $100,1000,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ עדיין שואפת ל-$0$ למרות שבהתחלה היא דווקא התרחקה ממנו קצת. אבל עדיין, איך ממש מגדירים את זה מתמטית?

**הגדרה 2.** שנאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר $L$ ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ או $a_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}L$ אם

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\forall n>N_\varepsilon:|a_n-L|<\varepsilon$$

נכון שזה נראה מאוד מפחיד במבט ראשון, אך בעצם זה גם דבר הגיוני. "בלשון בני אדם", ההגדרה אומרת שלכל מרחק שיתנו לי מהגבול, לא חשוב כמה קטן (זהו האפסילון), אני יכול למצוא מקום בסדרה (זה ה- $N_\epsilon$, מקום בסדרה שתלוי במרחק הקטן אפסילון שנתנו לי), שכל האיברים אחרי המקום ההוא (לכל המקומות $n$ ש- $n>N_\epsilon$) מקיימים שהמרחק שלהם מהגבול ( $|a_n-L|$ זה המרחק בין האיבר $a_n$ לגבול $L$ ) קטן מאפסילון, המרחק ההתחלתי הקטן.

**דוגמה 1.** במקרה של $a_n=\frac{1}{n}$, נרצה להוכיח שזה שואף ל-$0$. כלומר לכל מרחק מ-$0$, לא חשוב כמה קטן (אפסילון), אמצא מקום בסדרה שכל האיברים אחריו מקיימים ש- $|a_n-0|<\epsilon$ (המרחק בין האיבר לגבול, $0$, קטן מאפסילון). לדוגמה, אם מישהו יתן לי את המרחק $\varepsilon=0.0001$, אם נסתכל על האיבר במקום ה- $N=10000$, המרחק בין האיברים שבאים אחריו לבין $0$ יהיה קטן מ- $0.0001$ (אפסילון). איך נוכיח אז שזה עובד לכל אפסילון?

יהי אפסילון גדול מ-$0$ (מישהו נתן לי מרחק ממש קטן, אולי $\varepsilon=0.0000001$ או אולי $\epsilon=10^{-10000}$ או אולי אפילו קטן יותר).

אנחנו צריכים למצוא $N$ שלכל $n>N$ יתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$, אבל זה בדיוק אומר ש- $|\frac{1}{n}|<\varepsilon$, וזה קורה אם $n>\frac{1}{\epsilon}$ (העברת אגפים פשוטה). לכן אם ניקח N שגדול מאחד חלקי אפסילון, יתקיים שלכל האיברים אחריו, המרחק ביניהם ל-$0$ קטן מאפסילון. בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח!

*הערה* 1 (הגבול הוא יחיד). כלומר אם $a_n$ לא יכולה להתכנס ל-2 גבולות שונים. במילים אחרות אם $a_n \to L_1$ ו- $a_n \to L_2$ אזי $L_1 = L_2$

*הוכחה.* תהי $a_n$ שמתכנסת ל- $L_1, L_2$ ונניח בשלילה ש- $L_1 \neq L_2$.
נניח בה"כ ש- $L_1 < L_2$.
אם נגדיר $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$ נקבל מהנתון $a_n \to L_1$ שקיים $N_1$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \Rightarrow L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2} = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

ובאופן דומה, מהנתון ש- $a_n \to L_2$ מסיקים שקיים $N_2$ כך שלכל $n > N_2$ מתקיים

$$|a_n - L_2| < \varepsilon \Rightarrow \frac{L_1 + L_2}{2} = L_2 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon$$

אז נגדיר את $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויתקיים לכל $n > N$

$$a_n < L_1 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2} = L_2 - \varepsilon < a_n$$

והגענו לסתירה. $\square$

**דוגמה 2.** הרבה אנשים שנתקלים בהתחלה במושג הגבול רואים את הסדרה

$$-1, 1, -1, 1, -1, ...$$

שהיא הסדרה $a_n = (-1)^n$ וחושבים שהסדרה מתכנסת ל-$0$, אך זה לא נכון. נראה את זה מהגדרת הגבול:
אם $a_n \to 0$ אזי

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n - 0| < \varepsilon$$

אבל אם ניקח לדוגמה $\varepsilon = \frac{1}{2}$ נראה כי תמיד $|a_n - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ ולכן הגדרת הגבול לא מתקיימת!
יותר מזה, לסדרה אין גבול, ואת זה נשאיר כתרגיל.