הגדרה 1. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:

1. M נקרא חסם מלעיל של A אם $\forall a \in A : a \leq M$ (כלומר שגדול/שווה מכל איברי הקבוצה)

2. m נקרא חסם מלרע של A אם $\forall a \in A : a \geq m$

דוגמה 1. ניקח לדוגמה את
$$A = \{1, 2, 3, -5, 463\}$$
1000 חסם מלעיל של A משום שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה.
גם 683 חסם מלעיל של A, מאותה סיבה.
463 הוא מקרה מיוחד של חסם מלעיל מיוחד, הוא המקסימום, דבר שנגדיר עוד מעט. מצד שני
-5.5 חסם מלרע של A משום שקטן או שווה לכל איברי הקבוצה.
-5 גם הוא חסם מלרע של A, אך הפעם זהו המינימום

דוגמה 2. לא לכל קבוצה יש חסם מלעיל או מלרע. לדוגמה ניקח את $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ ונראה ש-0 הוא חסם מלרע, איך אין לקבוצה חסם מלעיל!

הגדרה 2. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:
M הוא חסם עליון של A אם מתקיים:
א. M חסם מלעיל
ב. לכל חסם מלעיל T מתקיים $M \leq T$
מסמנים אותו $\sup A$, מהמילה superior.

הערה 1. חסם מלעיל של A הוא חסם עליון אם אין חסם מלעיל קטן ממנו, בעצם חסם עליון הוא חסם המלעיל הכי קטן.

הגדרה 3. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:
M הוא חסם עליון של A אם מתקיים:
א. M חסם מלרע
ב. לכל חסם מלרע T מתקיים $M \geq T$
מסמנים אותו $\inf A$, מהמילה inferior.

דוגמה 3. ניקח את
$$B = \left\{ \left(\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$$
נשים לב ש-1 חסם מלעיל של הקבוצה ואפילו החסם העליון שלה, משום שכל חסם מלעיל צריך להיות גדול או שווה לכל איברי הקבוצה, בפרט ל-1.
הקבוצה חסומה מלרע ע"י 0, וזה גם החסם התחתון, משום שאם היה חסם מלרע אחר, אפסילון, שלכל n היה מקיים $\varepsilon < \frac{1}{n}$ אז אפשר לראות שזה בלתי אפשרי ע"י לקחת $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ולהגיע לסתירה.

הערה 2. לא תמיד קיים חסם עליון, לדוגמה אם הקבוצה לא חסומה מלעיל, בוודאי שאין חסם עליון.

משפט 1. *אם חסם עליון קיים אזי הוא יחיד*

הוכחה. אם M_1, M_2 חסם עליונים אז שניהם חסמים מלעיל. כיוון ש- M_1 חסם עליון ו- M_2 חסם מלעיל מתקיים ש- $M_1 \leq M_2$, ובאופן סימטרי כיוון ש- M_2 חסם עליון ו- M_1 חסם מלעיל אז $M_2 \leq M_1$. בסך הכך $M_1 = M_2$ ואז ראינו שאם יש כמה חסמים עליונים, הם בעצם אותו אחד. $\square$

הערה 3. הטענה נבונה גם לחסם תחתון, עם הוכחה כמעט זהה (רק צריך להפוך את סימני אי השיוויונים)

הגדרה 4. חסם עליון של A נקרא מקסימום אם הוא שייך לקבוצה A (בעצם המקסימום זה איבר בקבוצה שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה)
חסם תחתון של A נקרא מינימום אם הוא שייך לקבוצה A

דוגמה 4. ניקח את $C = [a, b)$. נראה כי $\inf C = a, \sup C = b$, וכיוון ש- $a \in C, b \notin C$ נקבל שיש לקבוצה מינימום אבל לא מקסימום.

דוגמה 5. ניקח את

$$D = \left\{ \left(\frac{1}{10}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \{0.1, 0.01, 0.001, \cdots\}$$

נשים לב ש-0.1 חסם מלעיל של הקבוצה, ומשום גם נמצא בתוך הקבוצה הוא מקסימום שלה ומכאן גם חסם עליון.
מה המינימום שלה? נראה שאין כזה ע"י כך שנמצא את החסם התחתון של D ונראה שהוא לא בקבוצה, למרות שמינימום הוא תמיד בקבוצה.
0 חסם תחתון של D משום שחסם מלרע וגם אם קיים חסם מלרע גדול יותר, ε אז מתקיים

$$\forall n : \varepsilon \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n} \Rightarrow$$

$$\forall n : 10^n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

אבל החלק הימני קבוע והחלק השמאלי יכול להיות גדול כרצוננו (עבור בחירת n מספיק גדול) ולכן קיבלנו שמשהו שגדול כרצוננו קטן ממשהו קבוע וזוהי כמובן סתירה, ומכאן ש-0 הוא חסם המלרע הכי גדול.
מצד שני $0 \notin D$, ולכן אין מינימום.

משפט 2. *אם M חסם מלעיל של A ו- $M \in A$ אזי הוא מקסימום*

הוכחה. צריך להוכיח ש-M חסם עליון. נניח שקיים חסם מלעיל אחר, T אזי : $\forall a \in A$ $a \leq T$ אבל $M \in A$ ולכן $M \leq T$. לכן הוא חסם עליון. $\square$

שימו לב לשלילות הבאות:

1. M אינו חסם מלעיל אם"ם קיים איבר $a \in A$ כך ש- $a > M$
2. m אינו חסם מלרע אם"ם קיים איבר $a \in A$ כך ש- $a < M$
3. M אינו חסם עליון אם"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
   א. M אינו חסם מלעיל
   ב. קיים חסם מלעיל T כך ש- $T < M$.

4. m אינו חסם תחתון אם"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
א. m אינו חסם מלרע
ב. קיים חסם מלרע t כך ש- $m < t$.

משפט 3. *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי:*
M חסם עליון של A אמ"ם M חסם מלעיל של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$
m חסם תחתון של A אמ"ם m חסם מלרע של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a < m + \epsilon$

במילים: M חסם עליון אם הוא חסם מלעיל וגם אין חסם מלעיל הקטן ממנו. כלומר, כל מספר הקטן ממנו אינו חסם מלעיל. כלומר, אם נקטין את M בגודל כלשהו שאינו אפס נקבל מספר שאינו חסם מלעיל. מספר אינו חסם מלעיל אם"ם יש איבר בקבוצה הגדול ממנו. (ניסוח דומה עבור החסם התחתון.)

הוכחה. נוכיח עבור חסם עליון, ועבור חסם תחתון אפשר להוכיח באופן דומה.
$\boxed{\Leftarrow}$
נניח M חסם עליון. מתוך ההגדרה של חסם עליון נובע בפרט ש-M חסם מלעיל. נותר להוכיח כי

$$\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \epsilon$$

נניח בשלילה כי קיים $\epsilon > 0$ כל שלכל האיברים $a \in A$ מתקיים $a \leq M - \epsilon$.
לכן, לפי ההגדרה, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה. מכיוון שאפסילון גדול מאפס, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל קטן ממש מהחסם העליון M, בסתירה לכך שהוא חסם המלעיל הקטן ביותר.
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח בשלילה ש- M לא חסם עליון. לפי הנתון הוא חסם מלעיל ולכן מההנחה בשלילה מסיקים שיש חסם מלעיל קטן ממנו, נסמנו m. נסתכל על $\varepsilon = M - m$, ונראה ש- $M - \varepsilon = m$, שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה, ולכן אין איבר ב-A שגדול מ-$M - \varepsilon$, בסתירה לנתון. $\square$

הערה 4. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ונגדיר $B = \{-a : a \in A\}$. אזי
1. M חסם מלעיל של A אם ורק אם $-M$ חסם מלרע של B
2. M חסם עליון של A אם ורק אם $-M$ חסם תחתון של B.

הוכחה. 1. $-M$ חסם מלרע של B $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall b \in B : -M \leq b$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : -M \leq -a$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq M$
M חסם מלעיל של A

2. נניח M חסם עליון של A, בפרט הוא חסם מלעיל ולכן $-M$ חסם מלרע של B. בעת נניח בשלילה שקיים חסם מלרע $m \geq -M$, ולכן $-m \leq M$ חסם מלעיל של A בסתירה לכך ש- M חסם המלעיל הכי קטן שלו, ולכן אין חסם מלרע גדול מ- $-M$ ואז הוא חסם תחתון. את הכיוון השני מוכיחים באופן דומה.

$\square$

הערה 5 (אקסיומת החסם העליון). מאחת ההגדרות של $\mathbb{R}$ מקבלים שלכל $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל קיים חסם עליון.

משפט 4. *אם* $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ *חסומה מלרע אזי קיים חסם תחתון.*

הוכחה. תהי A לא ריקה חסומה מלרע. אם נגדיר את B כמו במשפט האחרון נקבל שהיא חסומה מלעיל לפי המשפט, ומההערה יש לה חסם עליון M. מאותו המשפט, נקבל ש- $-M$ חסם תחתון של A ולכן הוכחנו שיש לה חסם תחתון. (מצאנו אותו) $\square$

הערה 6. בהנתן 2 קבוצות לא ריקות A, B נגדיר את $A+B$ באופן הבא:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

אם שתיהן חסומות מלעיל אזי גם $A+B$ חסומה מלעיל ומתקיים ש- $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

הוכחה. קודם כל נראה ש- $\sup A + \sup B$ הוא חסם מלעיל של $A+B$: יהי $x \in A+B$ אזי קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש- $x = a + b$.
בעת נראה ש- $x = a + b \leq \sup A + \sup B$ משום ש- $a \leq \sup A, b \leq \sup B$.
בעת נראה שזהו חסם עליון: יהי $\varepsilon > 0$. ידוע אז ש-

$$\exists a' \in A, b' \in B : \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a', \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b'$$

ולכן

$$\sup A + \sup B - \varepsilon = \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < a' + b' \in A + B$$

הוכחנו שלכל אפסילון קיים איבר ב- $A+B$ שגדול מ- $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ולכן $\sup A + \sup B$ הוא החסם העליון של $A+B$ $\square$