1.0 חזקות ושורשים

הגדרה 1 (חזקה עם מעריך טבעי). עבור מספר ממשי x ומספר טבעי n נגדיר x^n להיות מכפלה של x בעצמו n פעמים. במקרה זה אומרים ש-x הוא בסיס החזקה ו-n הוא המעריך.

דוגמה 1.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \ , \ 6^2 = 6 \cdot 6 = 36 \ , \ 12^1 = 12$$

נשים לב ש-

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{times}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n\text{times}} = a^{m+n}$$

לדוגמה $11^3 \cdot 11^4 = 11^{3+4} = 11^7$. בנוסף אם בסיס החזקה שונה מ-0, ניתן להפיק את הכלל הבא:

$$a^m = a^{m-n+n} = a^{m-n} \cdot a^n \Rightarrow a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

הגדרה 2. מהכלל הזה ניתן להגדיר חזקה עם מעריך שלם:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$$

(עבור $a = 0$ לא מוגדרת החזקה 0 בחזקת 0)

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

דוגמה 2.

$$3^0 = 1 \ , \ 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

מה אם המעריך לא שלם? קודם כל, צריך לשים לב לעוד כלל חזקות חשוב:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot (a^m) \cdots (a^m)}_{n\text{times}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}}}_{n\text{times}} =$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \cdot n\text{times}} = a^{m \cdot n}$$

הגדרה 3 (שורש). $\sqrt[n]{x}$ מוגדר להיות המספר שאם נעלה בחזקת n, נקבל את x .

דוגמה 3. $\sqrt[2]{9} = 3$ כי $3^2 = 9$
$\sqrt[5]{243}$ הוא המספר שאם נעלה בחזקת 5 נקבל 243, והתשובה היא 3, משום ש- $3^5 = 243$
במקרה ש- $n = 2$, במקום $\sqrt[2]{x}$ מקובל לסמן $\sqrt{x}$

הערה 1. אם n אי זוגי אין שום בעיה, אבל אם n זוגי נשים לב שלכל מספר ממשי x^n הוא אי שלילי ולכן עבור $y < 0$ אם נחפש את $x = \sqrt[n]{y}$, אז $x^n = y$ אבל x^n אי שלילי ו- y שלילי ולכן יש סתירה. אי אפשר להגדיר שורש ממשי עם n זוגי למספר שלילי. כמו כן,

נראה כי עבור n זוגי מתקיים $x^n = (-x)^n$, אז מהו השורש ה- nי של x^n ? מגדירים שהשורש ה-nי במקרה הזה יהיה החיובי מביניהם.

כעת, נשים לב לכך ש-

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = (a^{\frac{1}{n}})^n$$

ומכאן ש- $a^{\frac{1}{n}}$ הוא מספר אם נעלה אותו בחזקת n נקבל את a, כלומר לפי הגדרה, השורש ה-n'י של a. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. הגענו ששורש הוא סוג של חזקה, ולכן ניתן בקלות להגיע לחוקי שורשים שאנלוגיים לחוקי החזקות. בנוסף אפשר להגדיר עכשיו חזקה עם מעריך רציונאלי:

הגדרה 4 (חזקה עם מעריך רציונאלי).

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.0 לוגריתמיים

ראינו ששורש היא פעולה הפוכה לחזקה ששימושית במקרה שאנחנו רוצים לשחזר את בסיס החזקה (לדוגמה "מה בחזקת 4 שווה 81? $\sqrt[4]{81}$), אבל זה לא עוזר לנו כשאנחנו רוצים לשחזר את המעריך (כמה פעמים אני צריך לכפול את 2 בעצמו כדי לקבל 1024? או במילים אחרות, איזה n פותר את המשוואה $2^n = 1024$?). בשביל שנוכל לענות על שאלות כאלה, נגדיר את פעולת הלוגריתם:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. כלומר $\log_a b$ הוא המעריך שצריך להעלות את a בחזקתו כדי לקבל את b:

$$a^{\log_a b} = b$$

בנוסף, a נקרא "בסיס הלוגריתם".

כמה דוגמאות:

$\log_2 1024 = 10$ כי $2^{10} = 1024$

$\log_4 8 = \frac{3}{2}$ כי $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

כאשר בסיס הלוגריתם הוא המספר e, נסמן הרבה פעמים log בלי לציין את הבסיס (משום ש-e הוא "הבסיס הטבעי") או שנכתוב במקום זאת ln (ואומרים "לאן"). יש לשים לב שבמחשבונים רבים כאשר לא מצויין בסיס הלוג מתכוונים לבסיס 10.

3.0 חוקי לוגריתמים

עבור $\log_a b$, בסיס הלוגריתם צריך להיות חיובי ששונה מ-1 ו-b חיובי. אם ננסה להגדיר לוגריתם עם בסיס שלילי, נגיע לבעיות שאין להם תשובה במספרים הממשיים, ואם הבסיס היה $a = 1$ נקבל לכל $b \neq 1$ שלא קיים x כך ש- $a^x = b$ ואם $b = 1$ כל x יתאים. אחרי שהגדרנו שהבסיס חיובי, $a^{\log_a b} = b$ חיובי משום שחזקה עם בסיס חיובי חייבת להיות חיובית.

$$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

$$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

את שאר התכונות נסו להוכיח בעצמכם:

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a(\tfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$$

$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$ – תכונה זו מאוד חשובה ובעצם אומרת איך אפשר להחליף את הבסיס של הלוגריתם לכל בסיס שאנחנו רוצים (m). מתכונה זו, אם נרצה לחשב במחשבון (שיודע לחשב לוגריתם רק לפי בסיס 10) את $\log_2 6$, נוכל לחשב במקום את $\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2}$