

**הגדרה 1.** אומרים שסדרה  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרת קושי (Cauchy sequence) אם מתקיים התנאי:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \epsilon$$

כלומר המרחק בין איברי הסדרה קטן באופן כזה שמאיזהשהו מקום בסדרה והלאה, מרחק בין 2 איברים (שיכולים להיות במקומות רחוקים כרצוננו אחד מהשני בסדרה) יהיה קטן כרצוננו.

**משפט 1.** בכל תת קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$ , אם סדרה שמורכבת מאיברי הקבוצה מתכנסת אז היא סדרת קושי (בפרט זה נכון לכל סדרה ב- $\mathbb{R}$ ).

*הוכחה.* יהי אפסילון גדול מ-0, אזי  $\exists N \forall n > N |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ . לכן מתקיים:  
 $\forall n, m > N : |x_n - x_m| = |(x_n - L) + (L - x_m)| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$   
 $\square$

**הגדרה 2.**  $A \subseteq \mathbb{R}$  נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי המורכבת מאיבריו מתכנסת לאיבר בתוכו.

**דוגמה 1.**  $\mathbb{Q}$  לא שלם, כיוון שאם ניקח את

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots \rightarrow \pi \notin \mathbb{Q}$$

זוהי סדרה שמתכנסת ב- $\mathbb{R}$  ולכן, מהמשפט הקודם, היא סדרת קושי. אבל היא סדרת קושי שמורכבת מאיברים רציונאליים ולא מתכנסת למספר רציונאלי, ולכן קבוצת המספרים הרציונאליים לא מהווה מרחב שלם.

**מסקנה 2.** בכל מרחב שלם, סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

*הוכחה.* מימין לשמאל זה נכון באופן כללי מהמשפט הקודם (סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי) ומשמאל לימין נובע מההגדרה של מרחב שלם, שדורש שכל סדרת קושי תתכנס למשהו בתוכו, ובפרט תתכנס.  
 $\square$

**משפט 3.**  $\mathbb{R}$  שלם

*הוכחה.* נניח  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת קושי, אזי לכל אפסילון חיובי

$$\exists N \forall n, m > N |x_n - x_m| < \epsilon$$

ואז  $x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon$  וזה נכון לכל  $n > N$

$$x_m - \epsilon \leq l_{N+1} \leq L_{N+1} \leq x_m + \epsilon$$

מהעברת אגפים מקבלים ש- $0 \leq L_{N+1} - l_{N+1} \leq 2\epsilon$ . אם ניקח לכן סדרת אפסילונים ששואפת ל-0 ובהתאם אליהם ניקח את ה- $N$ ים המתאימים וממשפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול העליון והתחתון שווים, ואז לפי משפט הסדרה מתכנסת אליהם.  
 $\square$

**דוגמה 2.** נסתכל על

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

נראה כי המרחק בין איברים עוקבים בסדרה הולך ושואף ל-0:  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ .  
 , אף על פי כן, הסדרה לא תתכנס. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן אם נראה  
 שהסדרה הזאת לא סדרת קושי, אז בהכרח היא לא מתכנסת. אכן, נראה כי

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כלומר אין מקום בו משם והלאה המרחק בין כל 2 איברים קטן מחצי, ולכן זו לא סדרת קושי.

**מסקנה 4.** הטור ההרמוני, שמוגדר להיות  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  שווה לאינסוף.

הסבר: הסדרה הזאת היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת ל-  $\sup x_n$  אבל אם זה היה מספר ממשי היינו מקבלים סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת, בסתירה למה שהרגע הוכחנו. לכן בהכרח  $\sup x_n = \infty$  ולשם הסדרה שואפת.