1.0 תתי סדרות

הגדרה 1. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית אז הצמצום של הסדרה $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אל הקבוצה A נקראת תת סדרה של x_n. עוד דרך להסתכל על זה היא לקחת סדרה חד חד ערכית של טבעיים שמונוטונית עולה, n_k (לדוגמה $n(k) = 2k$ היא סדרת הזוגיים $2, 4, 6, \cdots$) ואז להסתכל על $f(n(k))$ או x_{n_k}.

דוגמה 1. נסתכל על הסדרה $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ נסתכל על הסדרה שנמצאת במקומות הזוגיים, כלומר ניקח את $A = \mathbb{N}_{\text{even}}$ ואז $n(k) = 2k$ ו- x_{n_k} נראית כבה: $0, 0, 0, 0, \cdots$. הסדרה המקורי לא מתכנסת, אבל תת הסדרה הזאת כן מתכנסת, ל-0. זה הרעיון של גבול חלקי.

2.0 גבולות חלקיים

הגדרה 2. $l \in \mathbb{R}$ נקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת תת סדרה שלה שמתכנסת ל- l

משפט 1. *אם $x_n \to L$ אז כל תת סדרה שלה מתכנסת ל-L.*

הוכחה. תהי תת סדרה x_{n_k} ויהי אפסילון גדול מ-0. עפ"י הנתון $\exists n_0 \forall n > n_0 |x_n - L| < \epsilon$. ידוע ש- n_k סדרה חח"ע מונוטונית עולה של טבעיים, ולכן היא לא חסומה וקיים k_0 כך ש- $\forall k > k_0 : n_{k_0} > n_0$. מכאן ש- $\forall k > k_0 : |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ □

משפט 2. *תהי סדרה שכל תת סדרה שלה מתכנסת ל- L, אזי $x_n \to L$.*

הוכחה. נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- L, אזי $\exists_{\epsilon>0} \forall_N \exists_{n>N} : |x_n - L| \geq \epsilon$. אם כך, נבנה תת סדרה x_{n_k} באופן הבא: לכל N קיים $n > N$ שעבורו $|x_n - L| \geq \epsilon$ ולכן ניקח את אותם nים עבור $N = 1, 2, 3, \cdots$ ואלה יהיו ה- n_k. באופן הזה נקבל תת סדרה שהמרחק בין איבר בה ל-L גדול או שווה לאפסילון אבל זה סותר את הנתון שכל תתי הסדרות שואפות ל- L. □

3.0 קשר בין גבולות חלקיים לגבול עליון ותחתון

משפט 3. *כל גבול חלקי של סדרה הוא בין הגבול התחתון שלה לגבול העליון שלה.*

הוכחה. יהי l גבול חלקי אז קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to l$. מתקיים ש- $l_{n_k} \leq x_{n_k} \leq L_{n_k}$ וממשפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש. □

משפט 4. *הגבול העליון והתחתון הם גבולות חלקיים*

הוכחה. $L_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ ואז לכל k מתקיים $\exists_{n_k} : L_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < L_k$ ואז קיימת תת סדרה מונוטונית שלפי משפט הסנדוויץ' מתכנסת לגבול העליון. עבור הגבול התחתון באופן אנלוגי. □

4.0 משפט בולצאנו ויירשטראס

משפט 5. *לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת*

הוכחה. רעיון ההוכחה: הגבול התחתון הוא גבול של סדרה מונוטונית עולה (סדרת האינפימומים), והסדרה המקורית x_n חסומה מלעיל. לכן, גם סדרת האינפימומים חסומה מלעיל, ואז הגבול החלקי הוא מספר סופי משום שהוא גבול של סדרה מונוטונית וחסומה. משום שהגבול התחתון הוא גבול חלקי, קיימת תת סדרה שמתכנסת אליו. משל. בצורה יותר פורמלית: $-M \le x_n \le M \Rightarrow -M \le l_n \le M$ ואז l_n מונו' עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת, אז הגבול התחתון קיים, והוא גבול חלקי, ולכן יש תת סדרה מתכנסת. □