

תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר 2 סדרות חדשות: $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$, $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$. ברור ש- $l_n \leq L_n$.

תזכורת: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

מהתזכורת הזאת נשים לב ש- L_n מונו' (מונוטונית) יורדת ו- L_n מונו' עולה. זאת משום ש- $\{x_k : k \geq n\} \supseteq \{x_k : k \geq n+1\}$ ולכן $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$

הגדרה 1. הגבול העליון של x_n , שמסומן באופן הבא: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ מוגדר להיות $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. באותו אופן, הגבול התחתון הוא $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$.

משפט 1. תהי סדרה חסומה x_n אזי

הגבול העליון והתחתון זהים אם ורק אם הסדרה x_n מתכנסת (ואז תתכנס לגבול העליון/תחתון)

הוכחה. \Leftarrow נראה ש- $l_n \leq x_n \leq L_n$ אבל הקצוות מתכנסים לאותו מספר L ולכן, ממשפט הסנדוויץ', $x_n \rightarrow L$

\Rightarrow יהי $\varepsilon > 0$. אנו יודעים ש- $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \ni x_n \exists N \forall n > N$ ואז לפי ההגדרה $\forall n > N : L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$. לכן גם

$$\forall n > N : L - \varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L + \varepsilon$$

ובעצם קיבלנו ש- $\exists N \forall n > N : |L_n - L|, |l_n - L| < \varepsilon$

□