

תהי סדרה  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . נגדיר 2 סדרות חדשות:  $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$ ,  $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ . ברור ש-  $l_n \leq L_n$ .

תזכורת:  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

מהתזכורת הזאת נשים לב ש-  $L_n$  מונוטונית יורדת ו-  $l_n$  מונוטונית עולה. זאת משום ש-  $\{x_k : k \geq n\} \supseteq \{x_k : k \geq n+1\}$  ולכן  $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$

**הגדרה 1.** הגבול העליון של  $x_n$ , שמסומן באופן הבא:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  מוגדר להיות  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ . באותו אופן, הגבול התחתון הוא  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ .

**משפט 1.** תהי סדרה חסומה  $x_n$  אזי

הגבול העליון והתחתון זהים אם ורק אם הסדרה  $x_n$  מתכנסת (ואז תתכנס לגבול העליון/תחתון)

הוכחה.  $\Leftarrow$  נראה ש-  $l_n \leq x_n \leq L_n$  אבל הקצוות מתכנסים לאותו מספר  $L$  ולכן, ממשפט הסנדוויץ',  $x_n \rightarrow L$

$\Rightarrow$  יהי  $\varepsilon > 0$ . אנו יודעים ש-  $\exists N \forall n > N : x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  ואז לפי ההגדרה  $\forall n > N : L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$  . לכן גם

$$\forall n > N : L - \varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L + \varepsilon$$

ובעצם קיבלנו ש-  $\exists N \forall n > N : |L_n - L|, |l_n - L| < \varepsilon$

□