

1 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ "עולה מונוטונית" אם $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$, במקרה כזה יש כאלה שמסמנים $x_n \nearrow$.
באופן דומה "יורדת מונוטונית" תהיה סדרה בה $\forall n : x_n \geq x_{n+1}$ ובמקרה כזה יש כאלה שמסמנים $x_n \searrow$.

משפט 1. תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\sup x_n = M, \inf x_n = m$. אם $x_n \nearrow$ אז הסדרה מתכנסת ל- M ואם $x_n \searrow$ אז הסדרה מתכנסת ל- m .

הוכחה. נוכיח עבור סדרה מונוטונית עולה, ועבור מונוטונית יורדת ההוכחה אנלוגית. אם $M \in \mathbb{R}$ אז יהי $\epsilon > 0$ לפי תכונה של סופרימום, $\exists n_0 : x_{n_0} > M - \epsilon$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה,

$$\forall n > n_0 : M - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M < M + \epsilon$$

ואז $x_n \rightarrow M$

אם $M = \infty$ אז יהי $E \in \mathbb{R}$. מההגדרה של חסם עליון אינסופי, $\exists n_0 : x_{n_0} > E$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה, $\forall n > n_0 : E < x_{n_0} \leq x_n$ ואז $x_n \rightarrow \infty = M$.

□

2 מעבר גבול

תהי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאיבריה נראים ככה: x_1, x_2, x_3, \dots ונניח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. נסתכל על הסדרה x_{n+1} שאיבריה הם x_2, x_3, x_4, \dots ונראה ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$ גם כן. זאת משום שעבור $\epsilon > 0$ ידוע ש- $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - L| < \epsilon$ וכיוון שזה לכל $n > n_0$ אז במצב כזה גם $n+1$ (שהוא גדול מ- n שגדול מ- n_0) מקיים את הטענה ש- $|x_{n+1} - L| < \epsilon$.

העקרון הזה הוא ליבו של טריק נחמד שעוזר לחשב במקרים רבים גבולות של סדרות הנתונות בצורה רקורסיבית. השיטה היא כזאת: אם נתון ש- $x_{n+1} = f(x_n)$ אז גם $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$ אבל $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ובאגף ימין אפשר גם להשתמש באריתמטיקה של גבולות כדי להציב L במקומות המתאימים, וכך מגיעים למשוואה. צריך לשים לב שכל זה בא בהנחה שהסדרה x_n מתכנסת, ואת זה יש להוכיח!

דוגמה 1. מהו הגבול של הסדרה $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$?
פתרון: נניח שהסדרה מתכנסת, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_n}$. מכאן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + x_n$$

נציב $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ואז

$$L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - L - 2 = (L - 2)(L + 1) = 0$$

$$L = -1, 2$$

מצאנו שבמקרה שהסדרה מתכנסת, יש רק מועמד אחד שיכול להיות הגבול (-1 נפסל משום שכל איברי הסדרה חיוביים ולכן לא יכולים להתכנס למספר שלילי). אם נצליח להוכיח שהסדרה מתכנסת, הגבול שלה הוא 2 . נוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה ע"י 2 :

מונוטונית עולה -

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \sqrt{x_n + 2} \Leftrightarrow x_n^2 \leq x_n + 2 \Leftrightarrow -1 \leq x_n \leq 2$$

כלומר הסדרה לא תרד כל עוד האיברים בין -1 ל- 2 . כל איברי הסדרה חיוביים ועכשיו נוכיח שכל איברי הסדרה לא גדולים מ- 2 באמצעות אינדוקציה:

$$x_1 = \sqrt{2} < 2, x_n \leq 2 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

אז כל איברי הסדרה קטנים מ- 2 ולכן הסדרה מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת ל- 2 . (את הגבול חישבנו באמצעות מעבר הגבול)