1 סדרות

1.1 הגדרת סדרה

הגדרה 1. סדרה היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, כלומר התאמה בין המספרים הטבעיים למספרים הממשיים. לכל מספר טבעי מתאימים מספר ממשי. דוגמה לכך תהיה פונקציה שמתאימה את 1 ל-1, את 2 ל-$\frac{1}{2}$, את 3 ל- $\frac{1}{3}$ ובאופן כללי את n ל- $\frac{1}{n}$ (נהוג לסמן a_n במקום $f(n)$ בהקשר של סדרות ולכן פה $a_n=\frac{1}{n}$). כשאנחנו מתאימים את המספר הטבעי n למספר ממשי a_n, זה אומר אינטואיטיבית ש- a_n זה האיבר במקום ה- n. כך לדוגמה את הפונקציה שהתאימה את n ל- $\frac{1}{n}$ ניתן לראות בעצם כמה שאנחנו מכירים כסדרה:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

סימון מקובל לסדרות הוא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. גם סדרת מספרים אקראית היא סדרה, לא חייבת להיות חוקיות ברורה!

2.1 הגדרת הגבול

מתי נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר L?
באופן אינטואיטיבי הכוונה ברורה, הסדרה $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ בבירור שואפת ל-0, הסדרה $0,1,0,1,0,1,0,\cdots$ לא מתכנסת לכלום והסדרה $100,1000,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ עדיין שואפת ל-0 למרות שבהתחלה היא דווקא התרחקה ממנו קצת. אבל עדיין, איך ממש מגדירים את זה מתמטית?

הגדרה 2. שנאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר L ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ או $a_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}L$ אם

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\forall n>N_\varepsilon:|a_n-L|<\varepsilon$$

נכון שזה נראה מאוד מפחיד במבט ראשון, אך בעצם זה גם דבר הגיוני. "בלשון בני אדם", ההגדרה אומרת שלכל מרחק שיתנו לי מהגבול, לא חשוב כמה קטן (זהו האפסילון), אני יכול למצוא מקום בסדרה (זה ה- N_ϵ, מקום בסדרה שתלוי במרחק הקטן אפסילון שנתנו לי), שכל האיברים אחרי המקום ההוא (לכל המקומות n ש- $n>N_\epsilon$) מקיימים שהמרחק שלהם מהגבול ($|a_n-L|$ זה המרחק בין האיבר a_n לגבול L) קטן מאפסילון, המרחק ההתחלתי הקטן.

דוגמה 1. במקרה של $a_n=\frac{1}{n}$, נרצה להוכיח שזה שואף ל-0. כלומר לכל מרחק מ-0, לא חשוב כמה קטן (אפסילון), אמצא מקום בסדרה שכל האיברים אחריו מקיימים ש-$|a_n-0|<\epsilon$ (המרחק בין האיבר לגבול, 0, קטן מאפסילון). לדוגמה, אם מישהו יתן לי את המרחק $\varepsilon=0.0001$, אם נסתכל על האיבר במקום ה- $N=10000$, המרחק בין האיברים שבאים אחריו לבין 0 יהיה קטן מ- 0.0001 (אפסילון). איך נוכיח אז שזה עובד לכל אפסילון?

יהי אפסילון גדול מ-0 (מישהו נתן לי מרחק ממש קטן, אולי $\varepsilon=0.0000001$ או אולי $\epsilon=10^{-10000}$ או אולי אפילו קטן יותר).

אנחנו צריכים למצוא N שלכל $n>N$ יתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$, אבל זה בדיוק אומר ש-$|\frac{1}{n}|<\varepsilon$, וזה קורה אם $n>\frac{1}{\epsilon}$ (העברת אגפים פשוטה). לכן אם ניקח N שגדול מאחד חלקי אפסילון, יתקיים שלכל האיברים אחריו, המרחק ביניהם ל-0 קטן מאפסילון. בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח!

הערה 1 (הגבול הוא יחיד). כלומר אם a_n לא יכולה להתכנס ל-2 גבולות שונים. במילים אחרות אם $a_n \to L_1$ ו- $a_n \to L_2$ אזי $L_1 = L_2$

הוכחה. תהי a_n שמתכנסת ל- L_1, L_2 ונניח בשלילה ש- $L_1 \neq L_2$.
נניח בה"כ ש- $L_1 < L_2$.
אם נגדיר $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$ נקבל מהנתון $a_n \to L_1$ שקיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \Rightarrow L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2} = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

ובאופן דומה, מהנתון ש- $a_n \to L_2$ מסיקים שקיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים

$$|a_n - L_2| < \varepsilon \Rightarrow \frac{L_1 + L_2}{2} = L_2 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon$$

אז נגדיר את $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויתקיים לכל $n > N$

$$a_n < L_1 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2} = L_2 - \varepsilon < a_n$$

והגענו לסתירה. $\square$

דוגמה 2. הרבה אנשים שנתקלים בהתחלה במושג הגבול רואים את הסדרה

$$-1, 1, -1, 1, -1, ...$$

שהיא הסדרה $a_n = (-1)^n$ וחושבים שהסדרה מתכנסת ל-0, אך זה לא נכון. נראה את זה מהגדרת הגבול:
אם $a_n \to 0$ אזי

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n - 0| < \varepsilon$$

אבל אם ניקח לדוגמה $\varepsilon = \frac{1}{2}$ נראה כי תמיד $|a_n - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ ולכן הגדרת הגבול לא מתקיימת!
יותר מזה, לסדרה אין גבול, ואת זה נשאיר כתרגיל.

הגדרה 3. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת חסומה אם קבוצת איברי הסדרה חסומה (ראינו את ההגדרה של קבוצה חסומה).

דוגמה 3. הסדרה הזאת לא חסומה:

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, \cdots$$

משום שלא חסומה מלעיל.

משפט 1. *כל סדרה מתכנסת היא חסומה*

הוכחה. נניח שהסדרה מתכנסת ל- L, ולכן לכל אפסילון קיים N כך ש- $\forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$. בפרט, עבור $\varepsilon = 1$. נגדיר

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |L + 1|\}$$

ונראה ש- $\forall n : |a_n| \leq M$ משום שאם $n \leq N$ אז האיבר $|a_n|$ נמצא בקבוצה ש-M הוא המקסימום שלה, ואם $n > N$ אז גם ככה $|a_n - L| < 1$ ולכן $|a_n| < |L| + 1 \leq M$. $\square$

דוגמה 4. הסדרות $a_n = n$ ו- $b_n = (-1)^n \cdot n$ לא חסומות, ומכאן שהן לא מתכנסות.

הערה 2. המשפט ההפוך לא נכון. לדוגמה הסדרה $a_n = (-1)^n$ חסומה מלעיל ע"י 1 ומלרע ע"י -1 אבל לא מתכנסת

3.1 אריתמטיקה של גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

משפט 2. *אם $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \exists M : |b_n| < M$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 זו סדרה ששואפת ל-0)*

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש- a_n שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N כך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\varepsilon}{M}$. מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ-0 הוא

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \varepsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N, לכל $n > N$ יתקיים ש- $|a_n b_n| < \varepsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל-0. $\square$

דוגמה 5. $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובבת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$ (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \leq 1$) וסדרה ששואפת ל-0, $\frac{1}{n}$.

משפט 3. $a_n \to L \Leftrightarrow a_n - L \to 0$.

משפט 4. *אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.*

הוכחה. בדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש-

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n + b_n - 0| < \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש.

$\square$

משפט 5 (אריתמטיקה של גבולות)**.** *נניח ש- $a_n \to a, b_n \to b$ (כאשר $a, b \in \mathbb{R}$) אזי:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$
3. *אם* c *קבוע אז* $c\cdot a_n\to ca$
4. *אם* $a>0$ *אז* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$

הוכחה. 1. נסמן $x_n=a_n-a, y_n=b_n-b$ ועפ"י משפט, הם שואפים ל-0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל-0:

$$x_n+y_n=a_n-a+b_n-b=(a_n+b_n)-(a+b)\to 0$$

לפי משפט, זה אומר ש- $a_n+b_n\to a+b$

2. אם נסתכל על אותם x_n,y_n אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל-0.

$$a_nb_n=(x_n+a)(y_n+b)=x_ny_n+a\cdot y_n+b\cdot x_n+ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל-0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל-0 כפול מספר קבוע (שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה) ולכן שואפות ל-0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל- ab. סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו (סכום גבולות), $a_nb_n\to ab$

3. נגדיר $\forall n: c_n=c$ ונראה ש- $c_n\to c$, ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4. יהי אפסילון גדול מ-0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:
$\exists N_0\forall n>N_0: ||a_n|-|a||<|a|$ (לקחנו את הערך המוחלט של a להיות האפסילון).
לכן עבור $n>N_0$ מתקיים ש- $|a|<2|a_n|$

$$|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}|=|\frac{a-a_n}{a_na}|=\frac{|a-a_n|}{|a_n||a|}\leq|a-a_n|\frac{2}{|a_n||a|}$$

עפ"י הגדרת הגבול

$$\exists N\forall n>N: |a_n-a|\leq\epsilon\frac{|a|^2}{4}$$

מכאן שלכל $n>N$

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|\leq|a_n-a|\frac{2}{|a_n||a|}\leq\epsilon\frac{|a|^2}{4}\frac{2}{|a_n||a|}=\epsilon\frac{|a|}{2|a_n|}<\epsilon\frac{2|a_n|}{2|a_n|}=\epsilon$$

□

דוגמה 6. נמצא את גבול הסדרה $a_n=\frac{n^2+5n+6}{3n^2-2}$:

$$a_n=\frac{n^2+5n+6}{3n^2-2}=\frac{\frac{n^2+5n+6}{n^2}}{\frac{3n^2-2}{n^2}}=\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}$$

אבל $\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\to 0$ ומהסעיף השלישי והראשון במשפט הקודם מסיקים ש-$\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2},\frac{2}{n^2}\to 0$ ואחרי שנחבר את הקבועים נקבל שהמונה שואף ל-1 והמכנה ל-3 ומהסעיף הרביעי נקבל ש- $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

הערה 3. 1. אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת אזי $a_n + b_n$ מתבדרת

2. אם a_n, b_n מתבדרות אזי $a_n + b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס (אי אפשר לדעת באופן כללי, זה תלוי בסדרות עצמן)

3. אם $a_n \to L \neq 0$ ו- b_n מתבדרת אזי $a_n b_n$ מתבדרת

4. אם $a_n \to 0$ ו- b_n מתבדרת אזי $a_n b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס.

5. אם a_n, b_n מתבדרות אזי $a_n b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס

הסבר:

1. נניח בשלילה ש- $c_n = a_n + b_n$ מתכנסת אז נראה כי $c_n - a_n = b_n$ מתכנסת כהפרש של מתכנסות.

2. אפשר להגדיר $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = -n$ ולראות ש- $a_n + c_n = 0 \to 0$ ולעומת זאת $b_n + c_n = n(n-1)$ וזה מתבדר.

3. הוכחה בשיעורי הבית

4. הוכחה בשיעורי הבית

5. נגדיר $a_n = (-1)^n$ ואז $a_n \cdot a_n = 1 \to 1$ למרות ש-2 הגורמים מתבדרים. מצד שני אם מגדירים $b_n = n$ נקבל ש- $a_n b_n = (-1)^n \cdot n$ שזה לא חסום ולכן מתבדר.

<u>תרגיל בית:</u> נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a, b תמיד מתקיים $||a| - |b|| \leq |a - b|$ כדי להוכיח שאם $a_n \to L$ אז $|a_n| \to |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.

4.1 גבולות אינסופיים (סדרות)

ראינו מה קורה לגבי סדרות ששואפות למספר, אבל לפעמים נוח להגיד שסדרה "שואפת לאינסוף", כמו במקרה של $1, 2, 3, 4, \cdots$. מתי נגיד שזה מתקיים? אם הסדרה מצליחה בסופו של דבר לעקוף כל מספר, לא חשוב כמה הוא גדול. במובנים מתמטיים, זה אומר שלכל M (מספר גדול) קיים מקום בסדרה N שכל האיברים אחריו (לכל $n > N$), הסדרה תהיה גדולה יותר מהמספר הגדול M . בשפת כמתים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n > M$$

באותו אופן, אפשר להגדיר שאיפה למינוס אינסוף:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n < M$$

5.1 פעולות עם גבולות אינסופיים

משפט 6. *1. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \pm\infty$ (בהתאם לגבול של x_n)*

2. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \mathrm{sign}(a) \cdot \pm\infty$ כאשר הסימן של a מוגדר להיות 1 אם הוא חיובי, -1 אם הוא שלילי ו-0 אם הוא 0.

3. $\lim_{n\to\infty}|x_n|=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$.

גם הצד השני נכון, נסו להוכיח את זה לפי המשפטונים הבאים:

3.1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0 \wedge x_n>0 \Rightarrow x_n\to\infty$

3.2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0 \wedge x_n<0 \Rightarrow x_n\to -\infty$

הוכחה. 1. יהי $M>0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1}: a-1<y_n<a+1$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2}\forall_{n>n_2}: x_n>M-a+1$$

ולכן אם נגדיר $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0}: x_n+y_n>(M-a+1)+(a-1)=M$$

2. נוכיח עבור a חיובי, עבור a שלילי ההוכחה דומה מאוד והדבר היחיד במעט שמשתנה זה סימני אי השיוויון:

יהי $M>0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1}: \frac{a}{2}<y_n<\frac{3a}{2}$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2}\forall_{n>n_2}: x_n>\frac{2}{a}M$$

ולכן אם נגדיר $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0}: x_n\cdot y_n>\frac{2}{a}M\cdot\frac{a}{2}=M$$

3. יהי $\epsilon>0$. מהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}: x_n>\frac{1}{\epsilon}$$

אבל

$$\frac{1}{\epsilon}<|x_n| \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|}<\epsilon$$

וקיבלנו את הדרוש כי

$$\forall_{n>n_0}: |\frac{1}{x_n}|<\epsilon$$

3.1. נוכיח את 3.1 ו- 3.2 מוכח באופן דומה: יהי $M>0$ אז $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{1}{x_n}<\frac{1}{M}$ ומכאן ש- $\forall_{n>n_0}x_n>M$.

□

6.1 מקרים של כל מקרה לגופו - אי הגדרה:

יהיו x_n, y_n

1. אם $x_n \to \infty, y_n \to -\infty$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n + y_n$ (במילים אחרות, לא מוגדר $\infty + (-\infty)$)

דוגמה 7.

$$x_n = n, y_n = 1 - n \Rightarrow x_n + y_n = 1 \to 1$$

$$x_n = n^2, y_n = 2 - n^2 \Rightarrow x_n + y_n = 2 \to 2$$

$$x_n = n^2, y_n = -n \Rightarrow x_n + y_n = n^2 - n = n(n-1) \to \infty$$

$$x_n = n, y_n = -n^2 \Rightarrow x_n + y_n = -n^2 + n = -n(n-1) \to -\infty$$

$$x_n = n, y_n = (-1)^n - n \Rightarrow x_n + y_n = (-1)^n \Rightarrow \text{ Limit doesn'texist}$$

2. אם $x_n \to \infty, y_n \to 0$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n \cdot y_n$

דוגמה 8.

$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n y_n = 1 \to 1$$

$$x_n = n^2, y_n = \frac{2}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = 2 \to 2$$

$$x_n = n^2, y_n = \frac{-1}{n} \Rightarrow x_n y_n = -n \to -\infty$$

$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$x_n = n, y_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow x_n y_n = (-1)^n \Rightarrow \text{ Limit doesn'texist}$$

3. אם שתי הסדרות שואפות ל-0 אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $\frac{x_n}{y_n}$

דוגמה 9. אם ניקח כל זוג מהדוגמאות של מקרה 2 ונחליף את x_n בהופכי שלו, נקבל דוגמאות ל-3 (חשבו מה קורה במקרה זה ל- $\frac{y_n}{x_n}$)

<u>תרגיל:</u> מהו $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

<u>פתרון:</u> נשתמש בשיטה שנקראת "כפל בצמוד" והיא נקראת כך מהדמיון לרעיון של חילוק מספרים מרוכבים (לא חלק מהחומר של הקורס)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

7.1 משפט הסנדוויץ'

משפט 7 (משפט הסנדוויץ'). *תהיינה הסדרות* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *כך ש-* $\forall n : a_n \leq x_n \leq b_n$ *ובנוסף* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ *אזי הסדרה* x_n *מתכנסת והגבול שלה הוא* L.

הערה 4. שם המשפט נובע מכך שהסדרה האמצעית היא באמצע של מעין סנדוויץ' שיוצרות הסדרות a_n, b_n ששואפות לאותו גבול. פרופסור מארק אגרנובסקי מספר שברוסיה נהוג לקרוא למשפט הזה המשפט על שיכור ו-2 שוטרים משום שהסדרות a_n, b_n הן כמו שוטרים שהולכים למקום מסוים L וגורמים שיכור שהולך ביניהם x_n ללכת איתם לאותו מקום

הוכחה. אם $L = \infty$ אז פשוט עבור $M > 0$ ידוע שיש n_0 שמתקיים עבורו $\forall_{n>n_0} a_n > M$ ואז גם $x_n \geq a_n > M$. באותו אופן אם $L = -\infty$ אז נעשה אותו דבר רק עם העובדה ש- $x_n \leq b_n \leq M$.
אם $L \in \mathbb{R}$, יהי $\varepsilon > 0$. ידוע אז ש-

$$\exists_{n_1} \forall_{n>n_1} : L - \epsilon < a_n, \exists_{n_2} \forall_{n>n_2} : b_n < L + \epsilon$$

ואז עבור $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $\forall_{n>n_0} : L - \epsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \epsilon$
ומכאן, ש- $|x_n - L| < \epsilon$ ואז לפי ההגדרה, $x_n \to L$. □

דוגמה 10. נסתבל על הסדרה $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. אי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות במקרה הזה, אך נראה כי מתקיים:

$$0 \leq n \cdot \sin \frac{1}{n^2} \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

שימו לב שאי השיוויון השני נובע מכך ש- $\sin x < x$ לכל x חיובי.
קיבלנו שהסדרה לכודה בין 0 (שכמובן שואף ל-0) לבין $\frac{1}{n}$ (סדרה שגם היא שואפת ל-0) ולכן בסך הכל, ממשפט הסנדוויץ', הסדרה מתכנסת ל-0.

משפט 8. *נניח* $x_n \to L$ *אזי*

1. *לכל* $p < L$ *קיים* n_1 *כך ש-* $n > n_1 \Rightarrow x_n > p$
2. *לכל* $q > L$ *קיים* n_2 *כך ש-* $n > n_2 \Rightarrow x_n < q$

הוכחה. אם נציב בהגדרת הגבול של $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ את $\varepsilon = L - p$ נוכיח ישירות את 1 ואם נציב $\varepsilon = q - L$ נוכיח ישירות את 2.

□

מסקנה 9. *אם* $x_n \to a, y_n \to b$ *כש-* $a < b$ *אז* $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} x_n < y_n$

הוכחה. אם ניקח $p = \frac{a+b}{2}$ שהוא בין a ל-b אז לפי המשפט הקודם מתקיים:

$$\exists_{n_1} \forall_{n>n_1} : x_n < p, \exists_{n_2} \forall_{n>n_2} : y_n > p$$

ואז עבור $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $x_n < p < y_n$. □

מסקנה 10 (גבול שומר על אי שיוויון חלש). *כלומר אם* $x_n \leq y_n$ *ו-* $x_n \to a, y_n \to b$ *אז* $a \leq b$

הוכחה. נניח בשלילה ש- $a > b$ אזי מהמסקנה הקודמת $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} y_n < x_n$ בסתירה לנתון. $\square$

הערה 5 (גבול לא שומר על אי שיוויון חזק). אם ניקח את $y_n = \frac{1}{n}$ ו- $x_n = 0$ אזי $x_n < y_n$ אבל שתי הסדרות מתכנסות ו**לא נכון** להגיד ש- $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$

מסקנה 11 (גבול סדרה הוא יחיד). *כלומר אם* $x_n \to L_1, x_n \to L_2$ *אזי* $L_1 = L_2$

הוכחה. $x_n \le x_n$ ולכן, מהמסקנה הקודמת, $L_1 \le L_2$ ובאותה דרך $L_2 \le L_1$. מכאן ש- $L_1 = L_2$ $\square$