

## 1 חסמים

**הגדרה 1.** תהי קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$ , אזי:

1.  $M$  נקרא חסם מלעיל של  $A$  אם  $\forall a \in A : a \leq M$  (כלומר שגדול/שווה מכל איברי הקבוצה)

2.  $m$  נקרא חסם מלרע של  $A$  אם  $\forall a \in A : a \geq m$

**דוגמה 1.** ניקח לדוגמה את

$$A = \{1, 2, 3, -5, 463\}$$

1000 חסם מלעיל של  $A$  משום שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה.

גם 683 חסם מלעיל של  $A$ , מאותה סיבה.

463 הוא מקרה מיוחד של חסם מלעיל מיוחד, הוא המקסימום, דבר שנגדיר עוד מעט. מצד שני

-5.5 חסם מלרע של  $A$  משום שקטן או שווה לכל איברי הקבוצה.

-5 גם הוא חסם מלרע של  $A$ , אך הפעם זהו המינימום

**דוגמה 2.** לא לכל קבוצה יש חסם מלעיל או מלרע. לדוגמה ניקח את  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  ונראה ש-0 הוא חסם מלרע, איך אין לקבוצה חסם מלעיל!

**הגדרה 2.** תהי קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$ , אזי:

$M$  הוא חסם עליון של  $A$  אם מתקיים:

א.  $M$  חסם מלעיל

ב. לכל חסם מלעיל  $T$  מתקיים  $M \leq T$ .  
מסמנים אותו  $\sup A$ , מהמילה superior.

הערה 1. חסם מלעיל של  $A$  הוא חסם עליון אם אין חסם מלעיל קטן ממנו, בעצם חסם עליון הוא חסם המלעיל הכי קטן.

**הגדרה 3.** תהי קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$ , אזי:

$M$  הוא חסם עליון של  $A$  אם מתקיים:

א.  $M$  חסם מלרע

ב. לכל חסם מלרע  $T$  מתקיים  $M \geq T$ .  
מסמנים אותו  $\inf A$ , מהמילה inferior.

**דוגמה 3.** ניקח את

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

נשים לב ש-1 חסם מלעיל של הקבוצה ואפילו החסם העליון שלה, משום שכל חסם מלעיל צריך להיות גדול או שווה לכל איברי הקבוצה, בפרט ל-1.

הקבוצה חסומה מלרע ע"י 0, וזה גם החסם התחתון, משום שאם היה חסם מלרע אחר, אפסילון, שלכל  $n$  היה מקיים  $\varepsilon < \frac{1}{n}$  אז אפשר לראות שזה בלתי אפשרי ע"י לקחת  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  ולהגיע לסתירה.

הערה 2. לא תמיד קיים חסם עליון, לדוגמה אם הקבוצה לא חסומה מלעיל, בוודאי שאין חסם עליון.

**משפט 1.** אם חסם עליון קיים אזי הוא יחיד

הוכחה. אם  $M_1, M_2$  חסם עליונים אז שניהם חסמים מלעיל. כיוון ש-  $M_1$  חסם עליון ו-  $M_2$  חסם מלעיל מתקיים ש-  $M_1 \leq M_2$ , ובאופן סימטרי כיוון ש-  $M_2$  חסם עליון ו-  $M_1$  חסם מלעיל אז  $M_2 \leq M_1$ . בסך הכל  $M_1 = M_2$  ואז ראינו שאם יש כמה חסמים עליונים, הם בעצם אותו אחד.  $\square$

**הערה 3.** הטענה נכונה גם לחסם תחתון, עם הוכחה כמעט זהה (רק צריך להפוך את סימני אי השוויונים)

**הגדרה 4.** חסם עליון של  $A$  נקרא מקסימום אם הוא שייך לקבוצה  $A$  (בעצם המקסימום זה איבר בקבוצה שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה) חסם תחתון של  $A$  נקרא מינימום אם הוא שייך לקבוצה  $A$

**דוגמה 4.** ניקח את  $C = [a, b]$ . נראה כי  $\inf C = a, \sup C = b$ , וכיוון ש-  $a \in C, b \notin C$  נקבל שיש לקבוצה מינימום אבל לא מקסימום.

**דוגמה 5.** ניקח את

$$D = \left\{ \left( \frac{1}{10} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \{0.1, 0.01, 0.001, \dots\}$$

נשים לב ש-0.1 חסם מלעיל של הקבוצה, ומשום גם נמצא בתוך הקבוצה הוא מקסימום שלה ומכאן גם חסם עליון.

מה המינימום שלה? נראה שאין כזה ע"כ שנמצא את החסם התחתון של  $D$  ונראה שהוא לא בקבוצה, למרות שמינימום הוא תמיד בקבוצה.

0 חסם תחתון של  $D$  משום שחסם מלרע וגם אם קיים חסם מלרע גדול יותר,  $\varepsilon$  אז מתקיים

$$\forall n : \varepsilon \leq \left( \frac{1}{10} \right)^n = \frac{1}{10^n} \Rightarrow$$

$$\forall n : 10^n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

אבל החלק הימני קבוע והחלק השמאלי יכול להיות גדול כרצוננו (עבור בחירת  $n$  מספיק גדול) ולכן קיבלנו שמשוואה שגדול כרצוננו קטן ממשוואה קבוע וזוהי כמובן סתירה, ומכאן ש-0 הוא חסם המלרע הכי גדול. מצד שני  $0 \notin D$ , ולכן אין מינימום.

**משפט 2.** אם  $M$  חסם מלעיל של  $A$  ו-  $M \in A$  אזי הוא מקסימום

הוכחה. צריך להוכיח ש- $M$  חסם עליון. נניח שקיים חסם מלעיל אחר,  $T$  אזי:  $\forall a \in A : a \leq T$  אבל  $M \in A$  ולכן  $M \leq T$ . לכן הוא חסם עליון.  $\square$

שימו לב לשלילות הבאות:

1.  $M$  אינו חסם מלעיל אם"ם קיים איבר  $a \in A$  כך ש-  $a > M$

2.  $m$  אינו חסם מלרע אם"ם קיים איבר  $a \in A$  כך ש-  $a < m$

3.  $M$  אינו חסם עליון אם"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

א.  $M$  אינו חסם מלעיל

ב. קיים חסם מלעיל  $T$  כך ש-  $T < M$ .

4.  $m$  אינו חסם תחתון אם"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

- א.  $m$  אינו חסם מלמעלה  
 ב. קיים חסם מלמעלה  $t$  כך ש-  $m < t$ .

**משפט 3.** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  חסומה מלמעלה אז:

- $M$  חסם עליון של  $A$  אם"ם  $M$  חסם מלמעלה של  $A$  וגם לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $a \in A$  כך ש  
 $a > M - \epsilon$   
 $m$  חסם תחתון של  $A$  אם"ם  $m$  חסם מלמעלה של  $A$  וגם לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $a \in A$  כך ש  
 $a < m + \epsilon$

במילים:  $M$  חסם עליון אם הוא חסם מלמעלה וגם אין חסם מלמעלה הקטן ממנו. כלומר, כל מספר הקטן ממנו אינו חסם מלמעלה. כלומר, אם נקטין את  $M$  בגודל כלשהו שאינו אפס נקבל מספר שאינו חסם מלמעלה. מספר אינו חסם מלמעלה אם"ם יש איבר בקבוצה הגדול ממנו. (ניסוח דומה עבור החסם התחתון).

**הוכחה.** נוכיח עבור חסם עליון, ועבור חסם תחתון אפשר להוכיח באופן דומה.

⇐

נניח  $M$  חסם עליון. מתוך ההגדרה של חסם עליון נובע בפרט ש- $M$  חסם מלמעלה. נותר להוכיח כי

$$\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \epsilon$$

נניח בשלילה כי קיים  $\epsilon > 0$  כל שלכל האיברים  $a \in A$  מתקיים  $a \leq M - \epsilon$ . לכן, לפי ההגדרה,  $M - \epsilon$  הוא חסם מלמעלה של הקבוצה. מכיוון שאפסילון גדול מאפס,  $M - \epsilon$  הוא חסם מלמעלה קטן ממש מהחסם העליון  $M$ , בסתירה לכך שהוא חסם המלמעלה הקטן ביותר.

⇒

נניח בשלילה ש- $M$  לא חסם עליון. לפי הנתון הוא חסם מלמעלה ולכן מההנחה בשלילה מסיקים שיש חסם מלמעלה קטן ממנו, נסמנו  $m$ . נסתכל על  $\epsilon = M - m$ , ונראה ש- $M - \epsilon = m$ , שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה, ולכן אין איבר ב- $A$  שגדול מ- $M - \epsilon$ , בסתירה לנתון. □

**הערה 4.** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  ונגדיר  $B = \{-a : a \in A\}$ . אזי  
 1.  $M$  חסם מלמעלה של  $A$  אם ורק אם  $-M$  חסם מלמעלה של  $B$   
 2.  $M$  חסם עליון של  $A$  אם ורק אם  $-M$  חסם תחתון של  $B$ .

**הוכחה.** 1.  $-M$  חסם מלמעלה של  $B$  ⇐

$$\Leftrightarrow \forall b \in B : -M \leq b$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A : -M \leq -a$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq M$$

$$M \text{ חסם מלמעלה של } A$$

2. נניח  $M$  חסם עליון של  $A$ , בפרט הוא חסם מלמעלה ולכן  $-M$  חסם מלמעלה של  $B$ . בעת נניח בשלילה שקיים חסם מלמעלה  $m$ , ולכן  $-m \leq M$  חסם מלמעלה של  $A$  בסתירה לכך ש- $M$  חסם המלמעלה הכי קטן שלו, ולכן אין חסם מלמעלה גדול מ- $-M$  ואז הוא חסם תחתון. את הכיוון השני מוכיחים באופן דומה. □

**הערה 5** (אקסיומת החסם העליון). מאחת ההגדרות של  $\mathbb{R}$  מקבלים שלכל  $A \subseteq \mathbb{R}$  חסומה מלמעלה קיים חסם עליון.

**משפט 4.** אם  $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$  חסומה מלרע אזי קיים חסם תחתון.

הוכחה. תהי  $A$  לא ריקה חסומה מלרע. אם נגדיר את  $B$  כמו במשפט האחרון נקבל שהיא חסומה מלעיל לפי המשפט, ומההערה יש לה חסם עליון  $M$ . מאותו המשפט, נקבל ש- $M - A$  חסם תחתון של  $A$  ולכן הוכחנו שיש לה חסם תחתון. (מצאנו אותו)  $\square$

הערה 6. בהנתן 2 קבוצות לא ריקות  $A, B$  נגדיר את  $A + B$  באופן הבא:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

אם שתיהן חסומות מלעיל אזי גם  $A + B$  חסומה מלעיל ומתקיים ש- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

הוכחה. קודם כל נראה ש- $\sup A + \sup B$  הוא חסם מלעיל של  $A + B$ : יהי  $x \in A + B$  אזי קיימים  $a \in A, b \in B$  כך ש- $x = a + b$ . כעת נראה ש- $x = a + b \leq \sup A + \sup B$  משום ש- $a \leq \sup A, b \leq \sup B$ . כעת נראה שזהו חסם עליון: יהי  $\varepsilon > 0$ . ידוע אז ש-

$$\exists a' \in A, b' \in B : \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a', \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b'$$

ולכן

$$\sup A + \sup B - \varepsilon = \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < a' + b' \in A + B$$

הוכחנו שלכל אפסילון קיים איבר ב- $A + B$  שגדול מ- $\sup A + \sup B - \varepsilon$  ולכן  $\sup A + \sup B$  הוא החסם העליון של  $A + B$   $\square$