

1.0 משפט ז'ורדן לאופרטור עם ערך עצמי יחיד

הוכחנו את משפט ז'ורדן עבור אופרטור לינארי נילפוטנטי. מהגרסה שהוכחנו, נובל להסיק גרסה מוכללת יותר:

משפט 1 (משפט ז'ורדן לאופרטור עם ערך עצמי יחיד). יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור כך ש- λ הוא ערך עצמי יחיד שלו. אזי יש ל- T הצגה בצורה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא $J_m(\lambda)$. הצגה זו יחידה עד כדי הסדר של הבלוקים.

הוכחה. נתבונן באופרטור $T - \lambda I$. הוא נילפוטנטי, כי לפי משפט קאלי-המילטון,

$$(T - \lambda I)^n = p_T(T) = 0$$

לפי משפט ז'ורדן הנילפוטנטי, ניתן להציג את $T - \lambda I$ בעזרת מטריצה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_m(0)$. במילים אחרות, קיים בסיס B של V כך שמתקיים:

$$[T]_B - \lambda I_n = [T - \lambda I]_B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k}(0)} \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

היחידות היא מסקנה מיידית מהיחידות במקרה הנילפוטנטי.

□