1 משפט ז'ורדן הנילפוטנטי

לפני שנוכיח את משפט ז'ורדן המלא, נוכיח גרסאות חלשות יותר, ומהן נגיע לגרסה המלאה.

משפט 1 (משפט ז'ורדן הנילפוטנטי). *זהו משפט ז'ורדן בהנחה ש-$T : V \to V$ נילפוטנטי.*

נניח ש-$T : V \to V$ הוא אופרטור נילפוטנטי. אזי כל הערכים העצמיים שלו הם 0. זאת אומרת, צריך להוכיח של-T יש מטריצה מייצגת בצורת אלכסונית בלוקים, וכל בלוק הוא בצורה $J_m(0)$. אם כן, נרצה לבנות בסיס B כאיחוד זר $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$, כך שלכל $i = 1, \ldots, k$, המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B_i היא מהצורה $J_m(0)$. הלמה הבאה תוכיח מתי זה קורה, כלומר מהי הצורה של החלקים $B_1, \ldots, B_k$.

למה 2. *יהי E בסיס של V. אזי $[T]_E = J_n(0)$ אם ורק אם*

$$E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$$

כאשר $T^n(v) = 0$.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס שעבורו $[T]_B = J_n(0)$. אזי

$$[T]_E = \left([T(v_1)]_E, \ldots, [T(v_n)]_E\right) = (0, e_1, \ldots, e_{n-1})$$

לפי שוויון כל עמודה בנפרד, נקבל:

$$[T(v_1)]_E = 0 \Rightarrow T(v_1) = 0$$

$$[T(v_2)]_E = e_1$$

$$\vdots$$

$$[T(v_n)] = e_{n-1}$$

נגדיר $v = v_n$. אזי נקבל:

$$[T(v)]_E = e_{n-1} = [v_{n-1}]_E \Rightarrow T(v) = v_{n-1}$$

$$\left[T^2(v)\right]_E = e_{n-2} = [v_{n-2}]_E \Rightarrow T^2(v) = v_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\left[T^{n-1}(v)\right]_E = e_1 = [v_1]_E \Rightarrow T^{n-1}(v) = v_1$$

$$[T^n(v)]_E = 0 \Rightarrow T^n(v) = 0$$

ולכן $E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$. נחשב את המטריצה המייצגת $[T]_E$:

$T\left(T^{n-1}(v)\right) = T^n(v) = 0$, ולכן העמודה הראשונה במטריצה המייצגת היא 0.

$T\left(T^{n-2}(v)\right) = T^{n-1}(v)$, ולכן העמודה השנייה היא e_1.

באופן דומה ניתן להמשיך ולקבל $[T]_E = J_n(0)$.

□

הראינו כי אנחנו חייבים לחלק את הבסיס שלנו למסלולים, כדי שהמטריצה המייצגת תהיה בצורת ז'ורדן. נותר לבדוק האם תתי-המרחבים הנפרשים על ידם הם אינווריאנטיים. ניעזר בהערה הבאה:

הערה 1.

$$T\left[\mathsf{Span}\left\{v_1,\dots,v_k\right\}\right]=\mathsf{Span}\left\{T\left(v_1\right),\dots,T\left(v_k\right)\right\}=\mathsf{Span}\left(T\left[\left\{v_1,\dots,v_k\right\}\right]\right)$$

למה 3. *אם* $E=\left\{T^{m-1}\left(v\right),\dots,T\left(v\right),v\right\}$ *הוא מסלול מאורך* m*, אזי* $\mathsf{Span}\,E$ *הוא אינווריאנטי.*

הוכחה. נתבונן ב-$i=0,\dots,i-2$. אזי

$$T\left(T^{i}\left(v\right)\right)=T^{i+1}\left(v\right)\in E\subseteq\mathsf{Span}\,E$$

עבור $i=m-1$,

$$T\left(T^{m-1}\left(v\right)\right)=T^{m}\left(v\right)=0\in\mathsf{Span}\,E$$

לפי ההערה הקודמת, קיבלנו את מה שרצינו להוכיח.

□

רגע לפני שנוכיח את משפט ז'ורדן הנילפוטנטי, נגדיר הגדרה שתעזור במינוח.

הגדרה 1. בסיס E כך שהמטריצה המייצגת של T יחסית ל-E היא בצורת ז'ורדן, נקרא **בסיס מז'רדן**.

1.1 הוכחת משפט ז'ורדן הנילפוטנטי

הוכחת משפט ז'ורדן הנילפוטנטי. לא לבעלי לב חלש!

נניח כי $T:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k. נשים לב ש-$\mathsf{im}\left(T^{k-1}\right)\subseteq\ker T$, ולכן

$$\mathsf{im}\left(T^{k-1}\right)\subseteq\mathsf{im}\left(T^{k-2}\right)\cap\ker T\subseteq\mathsf{im}\left(T^{k-3}\right)\cap\ker T\subseteq\cdots\subseteq\ker T$$

ניקח בסיס $T^{k-1}\left(v_1\right),\dots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right)$ של $\mathsf{im}\left(T^{k-1}\right)$.

נשלים אותו לבסיס עבור $\mathsf{im}\left(T^{k-2}\right)\cap\ker T$ על ידי הוספת הווקטורים

$$T^{k-2}\left(v_{r_1+1}\right),\dots,T^{k-2}\left(v_{r_2}\right)$$

נשלים את הבסיס שקיבלנו לבסיס עבור $\mathsf{im}\left(T^{k-3}\right)\cap\ker T$ על ידי הוספת הווקטורים

$$T^{k-3}\left(v_{r_2+1}\right),\dots,T^{k-3}\left(v_{r_3}\right)$$

נמשיך באותו האופן עד שנקבל בסיס של $\ker T$, שיהיה מהצורה (המפחידה)

$$T^{k-1}\left(v_1\right),\dots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right),T^{k-2}\left(v_{r_1+1}\right),\dots,T^{k-2}\left(v_{r_2}\right),\dots,$$

$$T\left(v_{r_{k+2}+1}\right),\dots,T\left(v_{r_{k-1}}\right),v_{r_{k-1}+1},\dots,v_{r_k}$$

(שימו לב שזה בסיס ל-$\ker T$ ולא לכל V, ולכן הוא לא הבסיס המז'רדן)

אמרנו שכדי שהמטריצה המייצגת תהיה בלוק ז'ורדן, חייבים שהבסיס יהיה מסלול. אם אנחנו רוצים מטריצה אלכסונית בלוקים כך שכל בלוק הוא בלוק ז'ורדן, צריכים איחוד של מסלולים. אם כן, נוכיח שאיחוד המסלולים הבא מהווה בסיס של V (זהירות - מפלצת):

$$\begin{gathered}\{T^{k-1}(v_1),\dots,T(v_1),v_1,\dots,T^{k-1}(v_{r_1}),\dots,T(v_{r_1}),v_{r_1},\\ T^{k-2}(v_{r_1+1}),\dots,T(v_{r_1+1}),v_{r_1+1},\dots,T^{k-2}(v_{r_2}),\dots,T(v_{r_2}),v_{r_2},\\ \dots\\ T\left(v_{r_{k-2}+1}\right),v_{r_{k-2}+1},\dots,T\left(v_{r_{k-1}}\right),\dots,v_{r_{k-1}},\\ v_{r_{k-1}+1},\dots,v_{r_k}\}\end{gathered}$$

בת"ל ניקח צירוף לינארי מתאפס

$$(\star)\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}(v_j)=0$$

נפעיל T^{k-1} על שני האגפים. כמעט כל הווקטורים יתאפסו לפי בנייתם, ונקבל כי

$$\alpha_{11}T^{k-1}(v_1)+\dots+\alpha_{1r_1}T^{k-1}(v_{r_1})=0$$

אבל זהו צירוף של איברי בסיס של $\operatorname{im}T^{k-1}$, ולכן כל מקדמי השורה הראשונה מתאפסים;

$$\alpha_{11}=\dots=\alpha_{1r_1}=0$$

נחזור ל-$(\star)$. קיבלנו

$$(\star\star)\quad \sum_{i=2}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}(v_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}(v_j)=0$$

באופן דומה נוכל להפעיל T^{k-2}, ולקבל כי כל מקדמי השורה השנייה מתאפסים; $\alpha_{21}=\dots=\alpha_{2r_2}=0$.

נמשיך באותו האופן, להראות שלכל $i=1,\dots,k$, מקדמי השורה ה-i מתאפסים. לכן, כל המקדמים הם 0. הוכחנו בת"ל!

פורשת לכל $m=1,\dots,k-1$, הבסיס שבחרנו עבור $\operatorname{im}T^m\cap\ker T$ מוכל ב-$T^m[B]$, ובפרט ב-$T^m[\operatorname{Span}(B)]$, שהוא תת-מרחב. לכן,

$$\operatorname{im}T^m\cap\ker T\subseteq T^m[\operatorname{Span}(B)]$$

יהי $v\in V$. אזי $T^{k-1}(v)\in\operatorname{im}T^{k-1}\subseteq\operatorname{im}T^{k-1}[\operatorname{Span}(B)]$.

טענת עזר: לכל $m=1,\dots,k-1$, אם $T^m(v)\in T^m[\operatorname{Span}(B)]$, אזי

$$T^{m-1}(v)\in T^{m-1}[\operatorname{Span}(B)]$$

הוכחה: יהי $u \in \mathsf{Span}(B)$ שעבורו $T^m(u) = T^m(v)$. לכן,

$$T\left(T^{m-1}(v) - T^{m-1}(u)\right) = 0$$

אם כן,

$$T^{m-1}(v) - T^{m-1}(u) \in \mathsf{im}\, T^{m-1} \cap \ker T \subseteq T^{m-1}[\mathsf{Span}(B)]$$

אבל $T^{m-1}(u) \in T^{m-1}[\mathsf{Span}(B)]$, ולכן $T^{m-1}(v) \in T^{m-1}[\mathsf{Span}(B)]$, כדרוש.

ידוע

$$T^{k-1}(v) \in \mathsf{im}\, T^{k-1}[\mathsf{Span}(B)]$$

לכן, לפי טענת העזר,

$$T^{k-2}(v) \in \mathsf{im}\, T^{k-2}[\mathsf{Span}(B)]$$

מכאן

$$T^{k-3}(v) \in \mathsf{im}\, T^{k-3}[\mathsf{Span}(B)]$$

וכן הלאה, עד שמגיעים לכך שמתקיים

$$v = T^0(v) \in \mathsf{im}\, T^0[\mathsf{Span}(B)] = \mathsf{Span}(B)$$

כדרוש.

□

הוכחנו שצורת ז'ורדן של אופרטור נילפוטנטי קיימת. בעת, נוכיח כי היא יחידה (עד כדי שינוי סדר הבלוקים). ניעזר לכך בלמה הבאה:

למה 4. *יהי* $E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$ *מסלול מאורך* m, *יהי* $V_0 = \mathsf{span}(E)$, *ויהי* $T = T|_{V_0}$. *אזי*

$$\dim\left(\ker T_0 \cap \mathsf{im}\, T_0^j\right) = \begin{cases} 1, & j < m \\ 0, & j \geq m \end{cases}$$

הוכחה. נניח $j \geq m$.

$$T^m(v) = 0 \Rightarrow T^j(v) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^j[E] = \{0\} \Rightarrow \mathsf{im}\, T_0^j = \{0\} \Rightarrow \dim\left(\ker T_0 \cap \mathsf{im}\, T_0^j\right) = 0$$

נניח $j < m$.

נתבונן בווקטורים $T(v), \ldots, T^{m-1}(v)$. לכן, $\dim(\mathsf{im}\, T_0) \geq m-1$.

לכן, $\dim(\ker T_0) + (m-1) \leq \dim(\ker T_0) + \dim(\mathsf{im}\, T_0) = \dim V_0 = m$, כלומר $\dim(\ker T_0) \leq 1$, ומכאן $\dim\left(\ker T_0 \cap \mathsf{im}\, T_0^j\right) \leq 1$.

נתבונן בווקטור $T^{m-1}(v) \neq 0$ (לפי הגדרת המסלול). מצד שני, $T^{m-1}(v) = T^j\left(T^{m-j-1}(v)\right) \mathsf{im}\, T_0^j$, ובנוסף $T\left(T^{m-1}(v)\right) = T^m(v) = 0$, כלומר $T^{m-1}(v) \in \ker T$, כדרוש.

□

הגיע הזמן לעבור להוכחת היחידות של צורת ז'ורדן.

משפט 5 (משפט ז'ורדן הנילפוטנטי - יחידות). *יהי $T : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k, ויהי B בסיס מז'ורדן ל-T. אזי מספר המסלולים מכל אורך ב-B מוגדר באופן יחיד על ידי T (ולכן, מספר הבלוקים מכל גודל ב-$[T]_B$ מוגדר ביחידות).*

הוכחה. נוכיח כי:

1. המסלול הארוך ביותר ב-B הוא מסדר k.
2. לכל $j = 1, \ldots, k$, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j שווה ל-$\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T_0^j\right)$.
3. לכן, מספר המסלולים מאורך j בדיוק שווה ל:

$$\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^{j-1}\right) - \dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^j\right)$$

1. אם כל המסלולים ב-B הם מאורך קטן מ-k, אזי $T^{k-1} = 0$, ולכן סדר הנילפוטנטיות של T הוא $k-1$, בסתירה להנחה.

   אם קיים מסלול מאורך גדול מ-k, אז יחד עם $T^k = 0$ נקבל כי 0 שייך למסלול, בסתירה להגדרת המסלול.

2. נסמן $E_1, \ldots, E_r$ המסלולים ב-B. נסמן לכל $i = 1, \ldots, r$, $V_i = \operatorname{span}(E_i)$. נתבונן בסכום הישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

   נסמן לכל $i = 1, \ldots, r$, $T_i = T|_{V_i}$.

   לכן, לפי למה קודמת,

$$\ker T = \ker T_1 \oplus \cdots \oplus \ker T_r$$

   וכן

$$\operatorname{im} T = \operatorname{im} T_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} T_r$$

   לכן, לפי הלמה על חיתוך סכום ישר, נקבל כי

$$\ker T \cap \operatorname{im} T^j = \left(\ker T_1 \cap \operatorname{im} T_1^j\right) \oplus \cdots \oplus \left(\ker T_r \cap \operatorname{im} T_r^j\right)$$

   לפי הלמה הקודמת, לכל $s = 1, \ldots, r$, $\dim\left(\ker T_s \cap \operatorname{im} T_s^j\right) = \begin{cases} 1, & j < \ell \\ 0, & j \geq \ell \end{cases}$, כאשר ℓ הוא אורך המסלול.

   אם כן, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j הוא $\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^j\right)$, שזה הסכום על אורך כל המסלולים שסדרם גדול מ-j, בדרוש.

3. מסקנה ישירה משני הסעיפים הקודמים.

$\square$